Sur le théorème de Brauer–Siegel généralisé

Richard Griffon Philippe Lebacque Gaël Rémond

À la mémoire de notre ami Alexey Zykin,
dont les idées nous inspirent toujours,
et de sa femme Tatyana

Résumé – Nous étendons le théorème de Brauer–Siegel à de nouvelles familles de corps de nombres, comme par exemple celles formées de corps contenus dans la clôture résoluble d'un corps de nombres fixé. Nous définissons pour cela une notion de complexité galoisienne d'une extension de corps de nombres et montrons que toute famille asymptotiquement exacte dans laquelle la complexité galoisienne ne croît pas trop vite vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé conjecturé par Tsfasman–Vlăduţ. Ce critère unifie et étend divers résultats antérieurs. L'essentiel de la démonstration consiste à établir un nouveau principe de descente de zéros pour les fonctions zêta des corps de nombres qui raffine celui de Stark en faisant intervenir notre complexité galoisienne.

Abstract – We extend the Brauer–Siegel theorem to new families of number fields, both in the classical setting of asymptotically bad families and in the more general framework due to Tsfasman and Vlăduţ of asymptotically exact families. We introduce a notion of Galois complexity for extensions of number fields, and show that the generalized Brauer–Siegel theorem, as conjectured by Tsfasman and Vlăduţ, holds for families in which the complexity does not grow too fast. This allows to unify and extend all previously known results. The crucial step in our work is the proof of a new version – stated in terms of our Galois complexity – of a fundamental principle due to Stark descending exceptional zeroes of zeta functions down to quadratic number fields. Among the hitherto unknown cases we are able to treat are the families of number fields contained in the solvable Galois closure of a given number field.

Mots-Clés : Théorie asymptotique des corps de nombres, Théorème de Brauer–Siegel.
2020 Math. Subj. Classification : 11R42, 11R47, 11R99.

Introduction

Le théorème de Brauer–Siegel décrit le comportement asymptotique du produit du nombre de classes $h(K)$ d'un corps de nombres K par son régulateur des unités $R(K)$ en termes de son discriminant $\Delta(K)$. C'est un résultat central de la théorie des nombres du XX[e] siècle, qui a trouvé de nombreuses applications à des domaines variés des mathématiques (par exemple aux empilements de sphères [RT90], aux exposants de groupes de classes [HM18], en géométrie anabélienne [Iva14], pour la conjecture d'André–Oort pour $\mathcal{A}_g$ [Tsi18]) et de l'informatique (théorie des graphes [ST96], cryptosystèmes à clé publique [HM00]). Récemment, le théorème de Brauer–Siegel a également donné lieu à des énoncés en dimension supérieure : ainsi, on pourra consulter [HP16] et [Gri16, Gri18a, Gri19] pour un analogue dans certaines suites de courbes elliptiques. Mentionnons enfin que, faisant suite à la preuve dans [Gri18b] d'un théorème de Brauer–Siegel pour la suite des surfaces de Fermat sur un corps fini, Hindry [Hin19] a proposé une vaste généralisation conjecturale pour des suites de variétés sur les corps finis.

Le théorème de Brauer–Siegel classique peut s'énoncer de la manière suivante (voir [Sie35], [Bra47], [Bra50] ou bien les chapitres XIII et XVI de [Lan94]).

Théorème (Brauer–Siegel). *Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de corps de nombres telle que*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log|\Delta(K_i)|}{[K_i:\mathbb{Q}]} = +\infty. \tag{M}$$

Alors on a

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log\left(h(K_i)\, R(K_i)\right)}{\log\sqrt{|\Delta(K_i)|}} = 1$$

si l'une des conditions suivantes est remplie :

(C0) l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie,

(C1) la suite $([K_i:\mathbb{Q}])_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée,

(C2) pour tout $i\in\mathbb{N}$ l'extension $K_i/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

Plus récemment, Zykin, Dixit et Wong ont donné des renforcements de cet énoncé en remplaçant la condition *(C2)* par d'autres hypothèses de nature galoisienne. Pour les formuler, rappelons une définition. Nous dirons qu'une extension L/K de corps de nombres est *galoisienne par pas* s'il existe une suite $K = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_s = L$ de sous-extensions telle que, pour tout $i\in\{1,\ldots,s\}$, l'extension L_i/L_{i-1} est galoisienne. Avec ce vocabulaire, les articles [Zyk05], [Dix21] et [Won22] établissent respectivement le théorème sous les conditions :

(C3) pour tout $i\in\mathbb{N}$ l'extension $K_i/\mathbb{Q}$ est galoisienne par pas,

(C4) pour tout $i\in\mathbb{N}$ la clôture galoisienne de l'extension $K_i/\mathbb{Q}$ est résoluble,

(C5) pour tout $i\in\mathbb{N}$ il existe un corps $\mathbb{Q}\subset K_i'\subset K_i$ tel que la clôture galoisienne de K_i/K_i' est résoluble et $K_i'/\mathbb{Q}$ est galoisienne par pas.

Notre but consiste à affaiblir encore l'hypothèse du théorème pour traiter des suites de corps beaucoup plus générales qui, en particulier, engloberont naturellement celles qui vérifient l'une des conditions *(C1)* à *(C5)*. Nous remplaçons de plus (M) par une hypothèse moins restrictive en suivant Tsfasman et Vlăduţ (voir [TV02]). En effet, ils ont remarqué que, pour certaines suites $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne vérifiant pas (M), la limite de $\log\left(h(K_i)\,R(K_i)\right)/\log\sqrt{|\Delta(K_i)|}$ peut exister et être différente de 1. Nous rappellerons dans la partie suivante comment ils définissent une notion de famille asymptotiquement exacte $\mathscr{K}$ et lui associent un nombre réel $\beta(\mathscr{K})\in[2/5,6/5]$. Les suites $\mathscr{K}$ vérifiant (M) sont asymptotiquement exactes et satisfont $\beta(\mathscr{K})=1$. D'autres exemples sont obtenus en considérant les *tours*, c'est-à-dire les suites avec $K_i\subset K_{i+1}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$. Dans ce langage, les travaux de Tsfasman et Vlăduţ suggèrent la conjecture suivante.

Conjecture (Tsfasman–Vlăduţ). *Si $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres, nous avons*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log\left(h(K_i)\, R(K_i)\right)}{\log\sqrt{|\Delta(K_i)|}} = \beta(\mathscr{K}).$$

Nous dirons qu'une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres *vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé* si la conjecture de Tsfasman–Vlăduţ est vraie pour cette famille. Comme le théorème classique, cette conjecture est vraie sous l'hypothèse *(C0)* d'après Tsfasman–Vlăduţ eux-mêmes et sous *(C3)* d'après Lebacque [Leb07]. On la connaît également sous *(C4)* ou *(C5)* si l'on se restreint au cas des tours (voir [Dix21] et [Won22] respectivement).

Ici encore, notre théorème principal unifie et généralise tous ces travaux. Pour l'énoncer, introduisons la définition suivante : si L/K est une extension de corps de nombres, sa complexité galoisienne $\xi_{L/K}$ est l'entier

$$\xi_{L/K} = \min\left\{\max_{1\le i\le s}[L_i:L_{i-1}]_{\mathrm{Gal}},\ K = L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_s = L\right\},$$

où $[L_i:L_{i-1}]_{\mathrm{Gal}}$ désigne le degré de la clôture galoisienne de L_i/L_{i-1} et le minimum est pris sur toutes les chaînes finies de sous-extensions de L/K.

Théorème A. *Le théorème de Brauer–Siegel généralisé est vrai pour toute famille asymptotiquement exacte $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps de nombres telle que*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log|\Delta(K_i)|}{\log \xi_{K_i/\mathbb{Q}}} = +\infty.$$

Nous constatons que, pour tous corps de nombres $K \subset L \subset M$, nous avons

$$\xi_{M/K} \leq \max\{\xi_{M/L}, \xi_{L/K}\}, \qquad 1 \leq \xi_{L/K} \leq [L:K]!$$

et, si L/K est galoisienne par pas, $\xi_{L/K} \leq [L:K]$. Nous montrerons aussi (voir lemme 3.3) $\log \xi_{L/K} \leq 3(\log[L:K])^2$ si la clôture galoisienne de L/K est résoluble. Ces inégalités permettent de vérifier rapidement que chacune des conditions *(C1)* à *(C5)* entraîne l'hypothèse du théorème A, qui englobe donc bien les résultats cités ci-dessus. Les familles obtenues sont bien plus générales : à titre d'exemple, les inégalités précédentes montrent aussi que le théorème A couvre les familles asymptotiquement exactes $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant

(C6) il existe un entier μ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une suite de corps

$$\mathbb{Q} = L_{i,0} \subset L_{i,1} \subset \cdots \subset L_{i,s_i} = K_i$$

de sorte que, pour $1 \leq j \leq s_i$, l'extension $L_{i,j}/L_{i,j-1}$ est soit galoisienne, soit de clôture galoisienne résoluble, soit de degré au plus μ.

Toutes les approches du théorème de Brauer–Siegel se basent sur la formule des classes de Dirichlet pour traduire le problème en termes de fonctions zêta. Notons ζ_K la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres K et $\zeta_K^*(1)$ son résidu en 1. Dans les énoncés ci-dessus, il s'agit alors d'encadrer $\zeta_{K_i}^*(1)$ et toute la difficulté réside dans la minoration en raison de la présence éventuelle de zéros réels de ζ_{K_i} proches de 1. Sous la condition *(C0)* ces zéros n'existent pas ; sans cette information, il faut tâcher de montrer qu'ils ne peuvent pas tendre trop vite vers 1 lorsque i tend vers l'infini. Dans notre situation, nous verrons en reprenant l'approche de Lebacque [Leb07] basée sur le théorème de Mertens que le théorème A découle assez rapidement du résultat originel de Siegel [Sie35] pour les corps quadratiques et du principe de descente de zéros suivant.

Théorème B. *Soit L/K une extension de corps de nombres. Si la fonction zêta ζ_L admet un zéro réel ρ vérifiant*

$$\rho \in \left[1 - (32g(L)\,\xi_{L/K})^{-1}, 1\right[,$$

alors il existe une sous-extension F de L/K avec $[F:K] \leq 2$ et $\zeta_F(\rho) = 0$.

Cet énoncé généralise un résultat fondamental de Stark [Sta74] et une variante due à Murty [Mur01] qui étaient utilisés dans les travaux antérieurs de Tsfasman–Vlăduţ, Zykin, Lebacque, Dixit et Wong. Notons que nous nous intéressons uniquement ici au théorème de Brauer–Siegel mais le théorème B permet aussi d'améliorer les autres applications du résultat de Stark : par exemples les théorèmes 1 et 2 de [Sta74] sont valables en remplaçant $g(n)$ par $\xi_{k/\mathbb{Q}}$ (voir le paragraphe 3.5 ci-dessous).

Nous mentionnons pour terminer quelques conséquences du théorème A.

Théorème C. *Soient $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille et une tour de corps de nombres. Si*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log|\Delta(K_i)|}{\log \xi_{K_i/\mathbb{Q}}} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i,$$

alors la tour $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Ce critère assez souple s'applique à de nombreuses tours.

Théorème D. *Soit K un corps de nombres. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans sa clôture résoluble K^{solv} vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Puisqu'un p-groupe est résoluble, nous en déduisons en particulier :

Proposition E. *Soient K un corps de nombres, p un nombre premier et S un ensemble de places de K. Soit $K_S(p)$ la pro-p-extension maximale de K non ramifiée en dehors de S. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans $K_S(p)$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

L'intérêt de citer cet exemple tient à ce que ces corps $K_S(p)$ fournissent essentiellement la seule façon connue de construire explicitement (lorsque S est fini et $[K_S(p) : K]$ infini) des tours de corps de nombres ne satisfaisant pas (M) et donc d'exhiber des situations où $\beta(\mathscr{K}) \neq 1$. Nous rappellerons en partie 5 quelques unes de ces constructions dues à Hajir, Maire, Tsfasman, Vlăduţ et Zykin.

1. Définitions et notations

1.1. Genre d'un corps de nombres. – Si K est un corps de nombres, son *genre*, noté $g(K)$, est défini par $g(K) = \log \sqrt{|\Delta(K)|}$. Cette définition est motivée par l'analogie entre l'arithmétique des corps de nombres et celle des corps de fonctions des courbes sur les corps finis. Il est classique (théorème de Minkowski, voir proposition 2.17 au chapitre III de [Neu99]) que le seul corps de nombres de genre 0 est $\mathbb{Q}$. Si $K \neq \mathbb{Q}$, l'inégalité de Minkowski s'écrit

$$[K : \mathbb{Q}] \leq \frac{2\, g(K)}{g(\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))} = \frac{4}{\log 3}\, g(K) \qquad (1.1)$$

(l'inégalité usuelle [Neu99, III, proposition 2.14] entraîne ceci si $[K : \mathbb{Q}] \geq 5$ tandis que, pour les degrés $2, 3$ et 4, les corps de discriminant minimal sont connus [Poi76, §2]).

Si L/K est une extension finie de corps de nombres, rappelons que l'on a $g(L) \geq [L : K]\, g(K)$. Il s'agit d'une version faible de la formule de Riemann–Hurwitz qui exprime plus généralement la différence $g(L) - [L : K]\, g(K)$ en termes de la ramification de l'extension L/K (voir proposition 3.13 de [Neu99, III] pour un énoncé précis dans des notations légèrement différentes). En particulier, nous déduisons de cette formule l'égalité $g(L) = [L : K]\, g(K)$ lorsque l'extension L/K est partout non ramifiée.

1.2. Invariants de Tsfasman–Vlăduţ. – Soient $\mathcal{Q}_0 \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des puissances des nombres premiers et $\mathcal{Q}$ l'ensemble formé de $\mathcal{Q}_0$ ainsi que des deux symboles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Soit K un corps de nombres. Pour toute puissance $q \in \mathcal{Q}_0$ nous notons $\Phi_q(K)$ le nombre de places de K de norme q, $\Phi_{\mathbb{R}}(K)$ le nombre de places réelles et $\Phi_{\mathbb{C}}(K)$ le nombre de places complexes de K.

Considérons à présent une suite $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps de nombres. Nous dirons que la suite $\mathscr{K}$ est *une famille* si $g(K_i)$ tend vers $+\infty$ lorsque $i \to \infty$ et si $K_i \neq \mathbb{Q}$ pour tout i. Pour tout $q \in \mathcal{Q}$ nous définissons, si cela a un sens, la limite suivante :

$$\phi_q(\mathscr{K}) := \lim_{i\to\infty} \frac{\Phi_q(K_i)}{g(K_i)}.$$

Une famille $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dite *asymptotiquement exacte* si toutes les limites $\phi_q(\mathscr{K})$, pour $q \in \mathcal{Q}$, existent. En pratique, ce n'est pas une condition très restrictive. En effet, si $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une *tour*, c'est-à-dire si $K_i \subset K_{i+1}$ pour tout i, alors $\mathscr{K}$ est asymptotiquement exacte (voir [TV02, §2] où il est de plus démontré que les invariants $\phi_q(\mathscr{K})$ ne dépendent que de l'union $\bigcup_i K_i$). On montre plus généralement que, de toute famille $\mathscr{K}$, on peut extraire une sous-famille asymptotiquement exacte. Il est clair qu'une sous-famille $\mathscr{K}'$ d'une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{K}$ l'est également et que ses invariants $\phi_q(\mathscr{K}')$ sont alors égaux à ceux de $\mathscr{K}$. Nous renvoyons à [Leb10] et [Leb15] pour une étude plus poussée des invariants $\phi_q(\mathscr{K})$.

Une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{K}$ est dite *asymptotiquement mauvaise* si $\phi_q(\mathscr{K}) = 0$ pour tout $q \in \mathcal{Q}$, *asymptotiquement bonne* sinon. En pratique, les familles asymptotiquement mauvaises sont les plus communes. Pour tout corps de nombres K et tout $q \in \mathcal{Q}_0$ il est clair que

$\Phi_q(K) \leq [K:\mathbb{Q}] = \Phi_\mathbb{R}(K) + 2\Phi_\mathbb{C}(K)$. Si $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille asymptotiquement exacte, il suit que le quotient $[K_i:\mathbb{Q}]/g(K_i)$ admet une limite (finie) et que cette limite est nulle si et seulement si la famille est asymptotiquement mauvaise. Une famille est donc asymptotiquement mauvaise si et seulement si elle satisfait la condition (M) de l'introduction.

Si $\mathscr{K}$ est une famille asymptotiquement exacte, nous lui associons les deux quantités

$$\beta_0(\mathscr{K}) := \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathscr{K}) \log\frac{q}{q-1} \quad \text{et} \quad \beta(\mathscr{K}) := 1 + \beta_0(\mathscr{K}) - \phi_\mathbb{R}(\mathscr{K}) \log 2 - \phi_\mathbb{C}(\mathscr{K}) \log 2\pi.$$

La preuve du théorème 7.1 de [TV02] assure que la somme définissant $\beta_0(\mathscr{K})$ converge. Les théorèmes J et L du même article fournissent des exemples de tours $\mathscr{K}$ telles que $\beta(\mathscr{K}) \neq 1$ tandis que la partie 8 montre que l'on a toujours

$$2/5 \ \leq \beta(\mathscr{K}) \leq 6/5$$

(les énoncés des théorèmes 8.2 et 8.3 ne présentent que les conséquences pour le quotient de Brauer–Siegel mais la méthode de programmation linéaire employée concerne bien $\beta(\mathscr{K})$).

1.3. Théorème de Brauer–Siegel généralisé : architecture des preuves. — Supposons donnée une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{K} = (K_i)_i$ de corps de nombres. Rappelons rapidement comment s'articule classiquement la preuve de la conjecture de Tsfasman–Vlăduţ pour la famille $\mathscr{K}$ dans les cas où celle-ci est connue, tout en donnant une brève esquisse de la preuve du théorème A. Il s'agit de montrer que la limite

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log\left(h(K_i)\, R(K_i)\right)}{\log\sqrt{|\Delta(K_i)|}}$$

existe et vaut $\beta(\mathscr{K})$. Dans les notations introduites plus haut, la formule des classes de Dirichlet (voir [Lan94, VIII. §2, théorème 5]) entraîne

$$\frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} = \frac{\log\left(h(K_i)\, R(K_i)\right)}{g(K_i)} - 1 + \frac{\Phi_\mathbb{R}(K_i)}{g(K_i)} \log 2 + \frac{\Phi_\mathbb{C}(K_i)}{g(K_i)} \log 2\pi - \frac{\log \mu_{K_i}}{g(K_i)},$$

où μ_{K_i} désigne le nombre de racines de l'unité contenues dans K_i. À l'aide de cette relation, nous nous ramenons ainsi à prouver

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} = \beta_0(\mathscr{K}).$$

L'inégalité de Tsfasman–Vlăduţ (voir théorème 7.1 de [TV02]) donne

$$\limsup_{i} \frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} \leq \beta_0(\mathscr{K}) < \infty. \tag{1.2}$$

Avec cette inégalité, démontrer la conjecture de Tsfasman–Vlăduţ pour la famille $\mathscr{K}$ revient finalement à s'assurer que

$$\liminf_{i} \frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} \geq \beta_0(\mathscr{K}).$$

En des termes plus vagues, il s'agit d'obtenir une minoration asymptotique suffisamment précise du résidu $\zeta^*_{K_i}(1)$ en termes de $g(K_i)$. Une telle minoration s'obtient assez rapidement lorsque la fonction ζ_{K_i} n'a pas de zéro réel « trop proche » de 1 (voir lemme 2.2). Dans le cas où un tel zéro est présent, un travail supplémentaire est nécessaire. Notre approche consiste alors à utiliser un résultat de « descente de zéros » (théorème B) qui, sous hypothèses supplémentaires sur K_i, « explique » la présence d'un tel zéro par l'existence d'un sous-corps quadratique de K_i dont la fonction zêta s'annule en ce même point. Il restera alors à appliquer le théorème de Siegel à la suite de corps quadratiques ainsi construite.

2. Théorème de Mertens et théorème de Brauer–Siegel

Soit K un corps de nombres différent de $\mathbb{Q}$. Nous dirons que K admet un *zéro exceptionnel* s'il existe un zero réel ρ de sa fonction zêta ζ_K vérifiant

$$1-(8g(K))^{-1} \leq \rho < 1.$$

Si un tel zéro existe il est unique et simple d'après le lemme 3 de [Sta74]. Dans la suite de cet article, nous noterons $\rho(K)$ le zéro exceptionnel de ζ_K s'il existe et poserons $\rho(K)=0$ sinon.

L'article [Leb07] démontre la forme effective (et inconditionnelle) suivante du théorème de Mertens.

Théorème 2.1. *Il existe une constante effective $C>0$ telle que, pour tout corps de nombres K et tout $X>1$ vérifiant $\log X > C[K:\mathbb{Q}]g(K)^2$,*

$$\sum_{\substack{q\in\mathcal{Q}_0\\ q\leq X}} \Phi_q(K)\,\log\frac{q}{q-1} = \log\log X + \gamma + \log\zeta_K^*(1) + O\left(\frac{1}{(1-\rho(K))\log X}\right), \tag{2.1}$$

où γ est la constante d'Euler–Mascheroni. La constante implicite dans le terme d'erreur est absolue et effective.

Pour le confort de lecture, rappelons comment déduire de ce théorème le lemme ci-dessous (qui est essentiellement le lemme 6 de [Leb07]).

Lemme 2.2. *Soit $\mathscr{L}=(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Pourvu que*

$$\liminf_i \frac{\log(1-\rho(L_i))}{g(L_i)} = 0, \qquad \textit{i.e. que} \quad \limsup_i \frac{|\log(1-\rho(L_i))|}{g(L_i)} = 0,$$

la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Démonstration. Avec l'inégalité de Tsfasman–Vlăduţ (1.2), il suffit de montrer que $\beta_0(\mathscr{L})$ vérifie

$$\beta_0(\mathscr{L}) \leq \liminf_i \frac{\log\zeta_{L_i}^*(1)}{g(L_i)}.$$

Pour alléger les notations dans cette preuve, nous noterons $n_i=[L_i:\mathbb{Q}]$, $g_i=g(L_i)$ et $\rho_i=\rho(L_i)$ pour tout i. Pour tout i, posons $X_i := \exp\left(2C\,n_i g_i^2/(1-\rho_i)\right)$ et, pour tout $q\in\mathcal{Q}_0$,

$$f_i(q) := \frac{\Phi_q(L_i)}{g_i}\,\log\frac{q}{q-1} \quad \text{si } q\leq X_i \qquad \text{et } f_i(q):=0 \ \text{ sinon.}$$

Comme $\rho_i\in[0,1[$, X_i vérifie $\log X_i > Cn_ig_i^2$. L'estimation (2.1) entraîne que, pour tout $i\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\log\zeta_{L_i}^*(1)}{g_i} \geq \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} f_i(q) - \frac{\log\log X_i}{g_i} - \frac{\gamma}{g_i} - \frac{c_0}{g_i(1-\rho_i)\log X_i}$$

pour une certaine constante absolue $c_0>0$. Par choix de X_i, nous tirons

$$\begin{aligned}
\frac{\log\zeta_{L_i}^*(1)}{g_i} &\geq \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} f_i(q) + \frac{\log(1-\rho_i)}{g_i} - \frac{\gamma+\log(2C)}{g_i} - \frac{c_0(2C)^{-1}}{n_ig_i^3} - \frac{\log n_i}{g_i} - \frac{2\log g_i}{g_i}\\
&\geq \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} f_i(q) + \frac{\log(1-\rho_i)}{g_i} - \frac{\gamma+\log(2C)+c_0(2C)^{-1}+\log(n_i/g_i)}{g_i} - \frac{3\log g_i}{g_i}\\
&\geq \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} f_i(q) - \frac{|\log(1-\rho_i)|}{g_i} - o(1) \qquad \text{lorsque } i\to\infty. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Rappelons en effet que n_i/g_i est borné (par inégalité de Minkowski (1.1)) et que $(\log g_i)/g_i = o(1)$.

La famille $\mathscr{L}$ étant asymptotiquement exacte, il est clair que

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}_0} \liminf_i f_i(q) = \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} \lim_{i\to\infty} f_i(q) = \beta_0(\mathscr{L}) < \infty.$$

Par ailleurs, nous déduisons du lemme de Fatou que

$$\beta_0(\mathscr{L}) = \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} \liminf_i f_i(q) \leq \liminf_i \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} f_i(q).$$

En prenant les limites inférieures de part et d'autre de (2.2) et en reportant l'inégalité ci-dessus dans la relation obtenue, nous obtenons

$$\liminf_i \frac{\log \zeta^*_{L_i}(1)}{g(L_i)} \geq \beta_0(\mathscr{L}) - \limsup_i \frac{|\log(1-\rho_i)|}{g_i} + 0.$$

L'hypothèse assure alors que $\liminf_i \dfrac{\log \zeta^*_{L_i}(1)}{g(L_i)} \geq \beta_0(\mathscr{L})$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

On déduit immédiatement du lemme 2.2 ci-dessus le cas particulier important (et bien connu, voir théorème 7.2 et remarque 7.2 de [TV02]) suivant : *une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres qui n'ont pas de zéro exceptionnel vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.* Ainsi la conjecture de Tsfasman–Vlăduţ suit de l'hypothèse de Riemann généralisée (condition *(C0)* dans l'introduction).

3. Théorème de descente de zéros

3.1. Complexités galoisiennes. – Si L/K est une extension de corps de nombres et M/K sa clôture galoisienne, nous notons $[L:K]_{\mathrm{Gal}} := [M:K]$ et $\eta_{L/K}$ le plus petit entier $n \geq 1$ tel que M est le compositum de n conjugués de L sur K. Nous posons aussi $[L:K]'_{\mathrm{Gal}} := \eta_{L/K}\,[M:L]$.

Reprenons à présent la définition de la complexité galoisienne donnée dans l'introduction en lui adjoignant deux variantes.

Définition 3.1. Pour une extension L/K de corps de nombres, nous notons

$$\begin{aligned}
&\xi_{L/K} := \min\left\{\max_{1\leq i\leq s}[L_i:L_{i-1}]_{\mathrm{Gal}},\ K=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_s=L\right\},\\
&\xi'_{L/K} := \min\left\{\max_{1\leq i\leq s}[L_i:L_{i-1}]'_{\mathrm{Gal}},\ K=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_s=L\right\}\\
\text{et}\quad &\xi''_{L/K} := \min\left\{\max_{1\leq i\leq s}[L_i:L_{i-1}]'_{\mathrm{Gal}}\min\{1,2\,[L:L_i]^{-1}\},\ K=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_s=L\right\}.
\end{aligned}$$

Voici quelques propriétés immédiates de ces invariants.

Lemme 3.2. *Soit L/K une extension de corps de nombres.*

(i) $1 \leq \xi''_{L/K} \leq \xi'_{L/K} \leq \xi_{L/K} \leq [L:K]_{\mathrm{Gal}} \leq \dfrac{[L:K]!}{([L:K]-\eta_{L/K})!} \leq [L:K]!$.

(ii) $\xi_{L/K} \leq [L:K]\,\xi''_{L/K}$.

(iii) L/K est galoisienne si et seulement si $\eta_{L/K}=1$ si et seulement si $[L:K]'_{\mathrm{Gal}}=1$.

(iv) L/K est galoisienne par pas si et seulement si $\xi'_{L/K}=1$, auquel cas nous avons $\xi_{L/K}\leq[L:K]$.

(v) Si N est un corps de nombres contenant L alors $\xi_{N/K} \leq \max\{\xi_{N/L},\xi_{L/K}\}$ et de même pour ξ' et ξ''.

Voyons ensuite que la complexité galoisienne n'est pas trop grande en présence d'une extension résoluble.

Lemme 3.3. *Soient $K \subset L \subset N$ et $K \subset M \subset N$ des extensions de corps de nombres telles que M/K et N/K sont galoisiennes et N/M est résoluble. Si $\xi_{L/K} > [M : K]$, nous avons*

(i) $\xi'_{L/K} \leq \max_{p \text{ premier}} \left\{ (v_p([L:K]) + 1)\, p^{v_p([L:K])^2} \right\}$,

(ii) $\xi_{L/K} \leq \max_{p \text{ premier}} \left\{ p^{v_p([L:K])^2 + v_p([L:K])} \right\}$ *et*

(iii) $\log \xi_{L/K} \leq 3\,(\log[L:K])^2$.

Démonstration. Commençons par établir l'énoncé dans le cas particulier où l'extension L/K n'admet aucun sous-corps intermédiaire. Il n'y a pas de restriction à supposer en outre que N/K est la clôture galoisienne de $L \cdot M/K$. Puisque

$$[M : K] < \xi_{L/K} \leq [L : K]_{\mathrm{Gal}} \leq [N : K],$$

nous avons $M \neq N$. Notre argument s'inspire alors de celui de [Mur99, p. 517], lui-même adapté des preuves des théorème 3 et lemme 2 de [OS93]. Notons $G = \mathrm{Gal}(N/K)$, $H = \mathrm{Gal}(N/L)$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(N/M)$. Nos hypothèses se traduisent par les faits suivants : Γ est un sous-groupe distingué de G, Γ est un groupe résoluble non trivial, il n'y a pas de sous-groupe intermédiaire entre H et G et le seul sous-groupe distingué de G contenu dans $\Gamma \cap H$ est trivial. Considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des sous-groupes non triviaux de Γ qui sont distingués dans G. Cet ensemble est non vide car $\Gamma \in \mathscr{E}$. Fixons un élément $A \in \mathscr{E}$ minimal pour l'inclusion. Tout sous-groupe caractéristique de A est distingué dans G. Par minimalité, le seul sous-groupe caractéristique non trivial de A est A lui-même. Puisque A est résoluble (comme sous-groupe de Γ), ceci entraîne que A est abélien élémentaire c'est-à-dire isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ pour un nombre premier p et $r \geq 1$.

Montrons que G s'écrit comme le produit semi-direct $G = A \rtimes H$. Tout d'abord notons que $A \not\subset H$ car sinon A serait un sous-groupe non trivial de $\Gamma \cap H$ distingué dans G. Le sous-ensemble $A \cdot H$ est un sous-groupe de G (car A est distingué) qui contient donc strictement H. Nous avons ainsi $G = A \cdot H$. D'autre part, l'intersection $A \cap H$ est un sous-groupe distingué à la fois de H (puisque A est distingué dans G) et de A (puisque A est abélien) donc de $A \cdot H = G$. L'inclusion $A \cap H \subset \Gamma \cap H$ force ainsi $A \cap H$ à être trivial et nous avons bien $G = A \rtimes H$. En particulier l'ordre p^r de A s'interprète comme l'indice de H dans G, c'est-à-dire comme le degré de L/K.

Notons $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(A)$ l'action de H sur A. Pour tout $a \in A$, l'écriture de G comme produit semi-direct montre que $H \cap a^{-1}Ha = \{h \in H \mid \varphi(h)(a) = a\}$. Par suite, si $(a_1, \ldots, a_r)$ désigne une base de A,

$$H \cap \bigcap_{i=1}^{r} a_i^{-1} H a_i = \mathrm{Ker}\,\varphi.$$

Ce noyau est un sous-groupe distingué de H contenu dans le centralisateur de A donc il est distingué dans $A \cdot H = G$. Par correspondance de Galois, le corps $N^{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ est une extension galoisienne de K qui s'écrit comme compositum de $r+1$ conjugués de L au-dessus de K. En particulier $N^{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ n'est autre que la clôture galoisienne de L/K et nous avons $\eta_{L/K} \leq r + 1$. Nous en déduisons

$$\xi'_{L/K} = \eta_{L/K}\,[N^{\mathrm{Ker}\,\varphi} : L] = \eta_{L/K}\,[H : \mathrm{Ker}\,\varphi] = \eta_{L/K}\,|\mathrm{Im}\,\varphi|$$

et, de même, $\xi_{L/K} = [L : K]\,|\mathrm{Im}\,\varphi|$. Puisque $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A) \simeq \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, son cardinal est au plus p^{r^2}. Il vient $\xi'_{L/K} \leq (r+1)\,p^{r^2}$, $\xi_{L/K} \leq p^{r^2+r}$ et

$$\log \xi_{L/K} \leq (r^2 + r)\, \log p \leq 2r^2\, \log p \leq 3r^2\,(\log p)^2 = 3\,(\log[L:K])^2.$$

Le lemme est donc démontré lorsque L/K n'a pas d'extension intermédiaire.

Pour passer au cas général il suffit de choisir une suite $K = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_s = L$ où aucune des extensions L_i/L_{i-1} n'admet d'extension intermédiaire, en remarquant que $L_{i-1} \subset L_i \subset N$ et $L_{i-1} \subset L_i \cdot M \subset N$ satisfont les hypothèses galoisiennes de l'énoncé avec $[L_i \cdot M : L_{i-1}] \leq [M : K]$. $\square$

3.2. Genre d'un compositum. – Rappelons d'abord un énoncé classique.

Lemme 3.4. *Soient $L_1, \dots, L_n$ des corps de nombres et M leur compositum. Alors*

$$\frac{g(M)}{[M:\mathbb{Q}]} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{g(L_i)}{[L_i:\mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. Ceci découle directement de la relation de divisibilité entre discriminants donnée par le lemme 7 de [Sta74]. □

Nous utiliserons la conséquence suivante.

Lemme 3.5. *Soient $K \subset L \subset M$ des corps de nombres imbriqués et N/K la clôture galoisienne de L/K. Alors*

$$g(M \cdot N) \leq [L:K]'_{\mathrm{Gal}}\, g(M).$$

Démonstration. Par définition, N est le compositum de $\eta_{L/K}$ conjugués de L au-dessus de K. Par suite, $M \cdot N$ est le compositum de M et de $\eta_{L/K} - 1$ de ces conjugués (qui ont tous le même genre). Le lemme précédent donne donc

$$\frac{g(M \cdot N)}{[M \cdot N:\mathbb{Q}]} \leq (\eta_{L/K} - 1)\, \frac{g(L)}{[L:\mathbb{Q}]} + \frac{g(M)}{[M:\mathbb{Q}]}.$$

Puisque $[M:L]\, g(L) \leq g(M)$, il vient

$$g(M \cdot N) \leq \eta_{L/K}\, [M \cdot N : M]\, g(M) \leq \eta_{L/K}\, [N:L]\, g(M).$$

C'est le résultat souhaité, par définition de $[L:K]'_{\mathrm{Gal}}$. □

3.3. Extensions quadratiques. – Avant de passer à la descente, établissons un dernier lemme préliminaire (utilisant déjà les résultats de Brauer et Stark qui seront cruciaux pour la démonstration du théorème 3.7 ci-dessous).

Lemme 3.6. *Soient $L_1, \dots, L_n$ des extensions au plus quadratiques d'un corps de nombres K et ρ un réel tel que*

$$1 - \Big(32 \max_{1 \leq i \leq n} g(L_i)\Big)^{-1} \leq \rho < 1.$$

Si $\zeta_{L_i}(\rho) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors $\zeta_{L_1 \cap \dots \cap L_n}(\rho) = 0$.

Démonstration. Si $L_1 \cap \dots \cap L_n$ est égal à l'un des L_i alors la conclusion est claire. Sinon il existe deux indices $1 \leq i < j \leq n$ avec $L_i \neq L_j$ et $[L_i:K] = [L_j:K] = 2$. Le compositum $M = L_i \cdot L_j$ est alors une extension biquadratique (donc galoisienne) de K dont le genre vérifie $g(M) \leq 2(g(L_i) + g(L_j))$ d'après le lemme 3.4.

Le théorème 1 de [Bra47] dans l'extension M/L_i assure que ρ est un zéro de ζ_M. Comme ρ appartient à l'intervalle $[1 - (8\, g(M))^{-1}, 1[$, c'est un zéro simple de ζ_M. Nous appliquons alors le théorème 3 de [Sta74] à l'extension M/K et constatons que son sous-corps minimal dont la fonction zêta s'annule en ρ, puisqu'il doit être contenu dans L_i et L_j, ne peut être que $K = L_1 \cap \dots \cap L_n$. □

3.4. Descente de zéros. – Nous démontrons ici une version renforcée (puisque $\xi''_{L/K} \leq \xi_{L/K}$) du théorème B de l'introduction.

Théorème 3.7. *Soit L/K une extension de corps de nombres. Si la fonction zêta de L admet un zéro réel ρ vérifiant*

$$1 - \Big(32\, g(L)\, \xi''_{L/K}\Big)^{-1} \leq \rho < 1,$$

alors il existe une sous-extension F de L/K avec $[F:K] \leq 2$ et $\zeta_F(\rho) = 0$.

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur le degré de l'extension L/K. Si ce dernier est 1 ou 2, il n'y a rien à faire : le choix $F = L$ convient. Supposons donc $[L : K] \geq 3$ et le résultat vrai pour toute extension de degré au plus $[L : K] - 1$. Par définition de la complexité galoisienne $\xi''_{L/K}$, nous pouvons choisir une suite de sous-extensions

$$K = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_s = L$$

de sorte que $\xi''_{L/K} = \max_{1 \leq i \leq s} \left\{ [L_i : L_{i-1}]'_{\mathrm{Gal}} \min\left(1, 2\,[L : L_i]^{-1}\right) \right\}$. Il n'y a pas de restriction à supposer $[L_i : L_{i-1}] \geq 2$ pour $1 \leq i \leq s$. Posons $s' = s$ si $[L : L_{s-1}] \geq 3$ et $s' = s - 1$ si $[L : L_{s-1}] = 2$. Notons alors $K' = L_{s'-1}$ et $L' = L_{s'}$. Le choix de s' montre que nous avons $K \subset K' \subset L' \subset L$,

$$[L : L'] \leq 2, \quad [L : K'] > 2 \quad \text{et} \quad [L' : K']'_{\mathrm{Gal}} \leq \xi''_{L/K}.$$

Désignons à présent par M'/K' la clôture galoisienne de L'/K'. D'après le lemme 3.5, nous avons

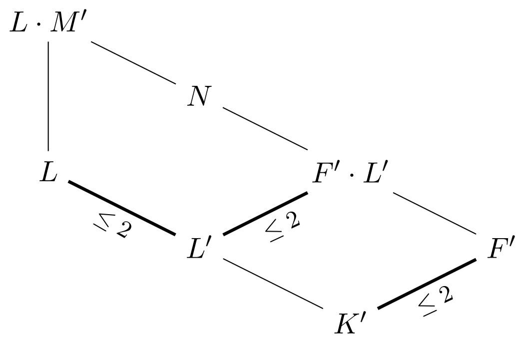
$$g(L \cdot M') \leq [L' : K']'_{\mathrm{Gal}}\, g(L) \leq \xi''_{L/K}\, g(L).$$

Ce compositum $L \cdot M'$ est une extension au plus quadratique de M' tandis que c'est une extension galoisienne de L. Le théorème 1 de [Bra47] assure $\zeta_{L \cdot M'}(\rho) = 0$. Tout comme la borne sur le genre ci-dessus, cette annulation vaut également pour chacun des conjugués de $L \cdot M'$ sur K'. Par conséquent, si nous désignons par N l'intersection de tous ces conjugués (qui est une extension galoisienne de K'), le lemme 3.6 assure $\zeta_N(\rho) = 0$.

Puisque N est un sous-corps de $L \cdot M'$, nous avons $g(N) \leq \xi''_{L/K}\, g(L)$ donc $\rho > 1 - (32\, g(N))^{-1}$ et, en particulier, ρ est un zéro simple de ζ_N. Le théorème 3 de [Sta74] montre alors qu'il existe une sous-extension F'/K' de N/K' telle que $[F' : K'] \leq 2$, $\zeta_{F'}(\rho) = 0$ et qui est minimale pour cette annulation au sens où, pour toute sous-extension N'/K' de N/K', on a

$$F' \subset N' \iff \zeta_{N'}(\rho) = 0.$$

En particulier, la fonction zêta du compositum $F' \cdot L'$ s'annule en ρ. Ce compositum $F' \cdot L'$ est une extension au plus quadratique de L' et (comme sous-corps de $L \cdot M'$) son genre est au plus $\xi''_{L/K}\, g(L)$. Ces trois propriétés sont partagées par L donc le lemme 3.6 entraîne $\zeta_{L \cap F' \cdot L'}(\rho) = 0$. Nous en déduisons $F' \subset L \cap F' \cdot L' \subset L$.



Cette inclusion fournit $g(F') \leq g(L)\,[L : F']^{-1}$. D'un autre côté, la suite

$$K = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{s'-1} = K' \subset F'$$

montre $\xi''_{F'/K} \leq [L : F']\,\xi''_{L/K}$ car $[F' : K']'_{\mathrm{Gal}} = 1$ et, si $1 \leq i \leq s' - 1$,

$$[L_i : L_{i-1}]'_{\mathrm{Gal}} \min\left\{1, \frac{2}{[F' : L_i]}\right\} \leq [L_i : L_{i-1}]'_{\mathrm{Gal}} \min\left\{1, \frac{2}{[L : L_i]}\right\} [L : F'] \leq [L : F']\,\xi''_{L/K}.$$

Nous avons ainsi $[F' : K] \leq 2[K' : K] < [L : K]$, $\zeta_{F'}(\rho) = 0$ et $\xi''_{F'/K}\, g(F') \leq \xi''_{L/K}\, g(L)$.

L'hypothèse de récurrence montre donc bien l'existence d'un corps F avec $K \subset F \subset F' \subset L$, $[F : K] \leq 2$ et $\zeta_F(\rho) = 0$. $\square$

3.5. Commentaires. – Dans la partie suivante, nous n'utiliserons le théorème 3.7 que lorsque $K = \mathbb{Q}$. Dans ce cas sa conclusion est renforcée en « $[F : \mathbb{Q}] = 2$ » puisque la fonction zêta de Riemann $\zeta_{\mathbb{Q}}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, 1[$.

Notre résultat « explique » par l'usage de la complexité galoisienne les résultats antérieurs de « descente de zéros » dus à Stark et Murty. En effet, si nous majorons $\xi''_{K/\mathbb{Q}}$ par $[K : \mathbb{Q}]!$, nous voyons apparaître le lemme 8 de [Sta74] (à un facteur 4 près) ; si nous remarquons que, si K est un corps CM de degré $2n$, nous avons $\xi''_{K/\mathbb{Q}} \leq n!$, nous sommes dans le cadre du lemme 9 de ce même article tandis que l'égalité $\xi''_{K/\mathbb{Q}} = 1$ pour une extension galoisienne par pas correspond à son lemme 10. Dans les deux cas, nous pourrions aussi retrouver la précision sur le caractère imaginaire de F en reprenant notre démonstration (qui se réduit à celle de Stark dans ces situations particulières).

Dans le cas d'une extension L/K dont la clôture galoisienne est résoluble, la majoration *(i)* du lemme 3.3 montre que notre résultat est plus précis que le théorème 2.1 de [Mur01] puisque $\xi''_{L/K}$ y est remplacé par

$$c\,(12[L : K])^{\max_p v_p([L:K])}\,(1 + \max_p v_p([L : K]))^2,$$

où c est une constante non précisée (et bien entendu nous aurions pu autoriser comme Murty une partie imaginaire à ρ puisque le lemme 3 de [Sta74] entraîne immédiatement que ρ est réel). Les mêmes remarques s'appliquent au théorème 2.2 de [Won22], combinaison des énoncés de Stark et Murty, dans lequel $\xi''_{L/\mathbb{Q}} \leq \xi''_{L/K}$ est également majoré par notre lemme 3.3 (et nous lisons plutôt $|\mathrm{Im}(s)|$ que $|\mathrm{Re}(s)|$ dans les domaines (2.1), (2.3) et (2.4) de [Won22] afin d'éviter qu'ils ne soient vides).

Enfin, en utilisant notre théorème 3.7 en lieu et place de ses lemmes 8 et 10 dans la démonstration du théorème 1 de [Sta74], nous en obtenons directement une version raffinée où $g(n)$ est remplacé par la quantité plus petite $\xi''_{k/\mathbb{Q}}$. La même chose vaut pour le théorème 2 car dans sa démonstration la précision que F est imaginaire dans les lemmes 9 et 10 n'est en fait pas utilisée.

4. Démonstration du théorème principal

Commençons par introduire la notion commode suivante :

Définition 4.1. Une famille $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps de nombres est dite *de complexité galoisienne modérée* si le quotient $(\log \xi_{K_i/\mathbb{Q}})/g(K_i)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$.

Au vu des inégalités entre ces quantités, remplacer ξ par ξ' ou ξ'' ne changerait pas la définition.

Nous démontrons dans cette partie l'énoncé annoncé comme théorème A dans l'introduction :

Théorème 4.2. *Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres de complexité galoisienne modérée vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une telle famille. Pour chaque entier $i \geq 0$ posons $c_i := 32\,g(K_i)\,\xi_{K_i/\mathbb{Q}}$ et distinguons deux cas : *ou bien la fonction zêta de K_i ne s'annule pas sur l'intervalle* $[1-c_i^{-1}, 1[$, auquel cas nous posons $F_i = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (ainsi $g(F_i) \leq g(K_i)$ par (1.1)) ; *ou bien la fonction zêta de K_i admet un zéro ρ dans l'intervalle* $[1 - c_i^{-1}, 1[$ et nous construisons un corps quadratique F_i comme suit. Le théorème 3.7 de descente de zéros implique l'existence d'un corps quadratique $F_i/\mathbb{Q}$ contenu dans K_i tel que $\zeta_{F_i}(\rho) = 0$. Comme F_i est contenu dans K_i, nous avons $g(F_i) \leq g(K_i)/[K_i : F_i] \leq g(K_i)$. Dans ce cas ρ est le zéro exceptionnel de K_i et de F_i. Dans les deux cas, nous avons

$$\frac{|\log(1 - \rho(K_i))|}{g(K_i)} \leq \max\left\{\frac{\log c_i}{g(K_i)}, \frac{|\log(1 - \rho(F_i))|}{g(K_i)}\right\}. \tag{4.1}$$

L'hypothèse de complexité galoisienne modérée faite sur $\mathscr{K}$ implique que $(\log c_i)/g(K_i)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$. Montrons à présent que le terme $|\log(1 - \rho(F_i))|/g(K_i)$ au second membre de (4.1) est aussi de limite nulle. Comme l'a remarqué Walfisz (voir [Wal36]) le théorème de Siegel sur les corps quadratiques (voir [Sie35]) assure que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon) > 0$ telle que la fonction ζ_{F_i} ne s'annule pas sur l'intervalle $[1 - c(\varepsilon)\,|\Delta(F_i)|^{-\varepsilon}, 1[$. Par définition de $\rho(\cdot)$, on en déduit l'existence d'une constante $A_\varepsilon \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|\log(1-\rho(F_i))| \leq \varepsilon\, g(F_i) + A_\varepsilon$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons ainsi

$$\frac{|\log(1-\rho(F_i))|}{g(K_i)} \leq \varepsilon\, \frac{g(F_i)}{g(K_i)} + \frac{A_\varepsilon}{g(K_i)} \leq \varepsilon + \frac{A_\varepsilon}{g(K_i)}.$$

Puisque $g(K_i)$ tend vers $+\infty$ avec i, nous concluons que la quantité $|\log(1-\rho(F_i))|/g(K_i)$ tend vers 0. En reportant dans (4.1) les majorations obtenues, il vient

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|\log(1-\rho(K_i))|}{g(K_i)} = 0.$$

Le lemme 2.2 permet à présent de conclure. □

Remarque 4.3. Voici un exemple de famille de corps de nombres qui n'est pas de complexité galoisienne modérée. Notons $(p_i)_{i\geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers et, pour chaque entier $i \geq 1$, K_i le corps de rupture du polynôme $X^{p_i} - X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. L'extension $K_i/\mathbb{Q}$ est de degré p_i et sa clôture galoisienne a pour groupe de Galois $\mathfrak{S}_{p_i}$ (voir les théorème 1 de [Sel56] et corollaire 3 de [Osa87]). Puisque $K_i/\mathbb{Q}$ n'a pas de sous-corps intermédiaire, nous avons

$$\xi_{K_i/\mathbb{Q}} = [K_i : \mathbb{Q}]_{\mathrm{Gal}} = p_i!$$

pour tout $i \geq 1$. D'autre part, les calculs sous le lemme 2 dans [Osa87] impliquent que $|\Delta(K_i)| \sim {p_i}^{p_i}$ si bien que $g(K_i) \sim \frac{p_i}{2}\log p_i$ lorsque i tend vers $+\infty$. Par conséquent le quotient $(\log \xi_{K_i/\mathbb{Q}})/g(K_i)$ tend vers $1/2$ lorsque i tend vers $+\infty$.

Nous ne connaissons pas d'exemple de tour de corps de nombres qui ne soit pas de complexité galoisienne modérée.

5. Applications et exemples

Dans cette partie, nous montrons que certaines des familles de corps de nombres apparaissant naturellement dans la théorie asymptotique des corps globaux vérifient inconditionnellement le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

5.1. Extensions pro-résolubles. — Pour un corps de nombres K, on note K^{solv} le compositum de toutes les extensions galoisiennes finies de K dont le groupe de Galois est résoluble.

Théorème 5.1. *Soit K un corps de nombres. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans K^{solv} vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

À notre connaissance, ce résultat est nouveau hormis dans le cas où $K = \mathbb{Q}$ et seulement pour des familles asymptotiquement mauvaises ou des tours (voir [Dix21]).

Démonstration. Soit $\mathscr{L} = (L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans K^{solv}. Quitte à remplacer K par sa clôture galoisienne sur $\mathbb{Q}$ (ce qui ne fait qu'affaiblir l'hypothèse sur $\mathscr{L}$), nous pouvons supposer l'extension $K/\mathbb{Q}$ galoisienne. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons N_i la clôture galoisienne de l'extension $K \cdot L_i/K$. L'extension N_i/K est alors résoluble. Nous pouvons appliquer le lemme 3.3 aux extensions $\mathbb{Q} \subset L_i \subset N_i$ et $\mathbb{Q} \subset K \subset N_i$. Celui-ci fournit la majoration :

$$\log \xi_{L_i/\mathbb{Q}} \leq \max\left\{[K:\mathbb{Q}], 3\,(\log[L_i:\mathbb{Q}])^2\right\}.$$

Il est alors clair que le quotient $(\log \xi_{L_i/\mathbb{Q}})/g(L_i)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$. La famille $\mathscr{L}$ est donc de complexité galoisienne modérée ce qui, avec le théorème 4.2, achève la preuve. □

En guise d'illustration du résultat ci-dessus, proposons l'exemple d'application suivant. Étant donné un corps de nombres K, notons $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la *tour de corps de Hilbert construite sur* K définie par récurrence par $H_0 = K$ et, pour tout entier $i \geq 0$, H_{i+1} est le corps de Hilbert de H_i. Nous posons alors $\mathcal{H}_K := \bigcup_{i\geq 0} H_i$.

Corollaire 5.2. *Soit K un corps de nombres. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans $\mathcal{H}_K$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. L'extension $\mathcal{H}_K/K$ est pro-résoluble (et non ramifiée). Il suffit donc d'appliquer le théorème ci-dessus. □

5.2. Extensions $K_S(p)$. – Soient K un corps de nombres, p un nombre premier et S un ensemble de places de K. On considère la pro-p-extension maximale $K_S(p)$ de K qui est non ramifiée hors de S. Lorsque S est fini et que l'extension $K_S(p)/K$ est infinie, on dit que le corps K *admet une S-p-tour de corps de classes infinie* (la seule façon connue de vérifier que la pro-p-extension $K_S(p)/K$ est infinie est le critère de Golod–Shafarevich, voir théorème 3 de [HM01]). Les exemples d'extensions infinies asymptotiquement bonnes d'un corps de nombres donné sont rares. Ceux-ci sont essentiellement construits à partir de sous-extensions de $K_S(p)$ pour un corps de nombres K admettant une S-p-tour de classes infinie.

Nous obtenons une version plus générale de la proposition E, comme suit :

Corollaire 5.3. *Soient $K_1, \dots, K_r$ des corps de nombres. Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, nous fixons un nombre premier p_j et un ensemble S_j de places de K_j et nous notons $\mathcal{K}$ le compositum*

$$\mathcal{K} := K_{1,S_1}(p_1) \cdot K_{2,S_2}(p_2) \cdot \ldots \cdot K_{r,S_r}(p_r).$$

Supposons que $\mathcal{K}$ est de degré infini sur $\mathbb{Q}$. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans $\mathcal{K}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Si de plus, pour tout j, l'ensemble S_j est fini et les places de K_j contenues dans S_j ne divisent pas p_j, une telle famille est asymptotiquement bonne.

Démonstration. Soit $\mathscr{L} = (L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres tous contenus dans $\mathcal{K}$. Le théorème 5.1 montre que $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé puisqu'un pro-p_j-groupe est en particulier pro-résoluble. Supposons à présent que, pour tout j, S_j est fini et que les places de S_j ne divisent pas p_j. Soit K le compositum des K_j. Sous nos hypothèses, l'extension $\mathcal{K}/K$ s'écrit comme compositum d'extensions modérément ramifiées donc est elle-même modérément ramifiée. On note S l'ensemble des places de K divisant l'une de celles des S_j. Pour tout i, la formule de Riemann–Hurwitz (voir [Neu99, chapitre III, proposition 3.13]) appliquée à l'extension $K \cdot L_i/K$ montre

$$g(K \cdot L_i) \leq [K \cdot L_i : K] \left(g(K) + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p}\in S} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \right).$$

Il vient alors

$$\frac{g(L_i)}{[L_i : \mathbb{Q}]} \leq \frac{g(K \cdot L_i)}{[K \cdot L_i : \mathbb{Q}]} \leq \frac{g(K)}{[K : \mathbb{Q}]} + \frac{\sum_{\mathfrak{p}\in S} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{2[K : \mathbb{Q}]}.$$

Par suite, le quotient $g(L_i)/[L_i : \mathbb{Q}]$ reste borné lorsque i varie donc son inverse $[L_i : \mathbb{Q}]/g(L_i)$ ne saurait tendre vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$. Comme la famille $\mathscr{L}$ est asymptotiquement exacte, nous concluons comme au paragraphe 1.2 qu'elle est asymptotiquement bonne. □

Lorsque $r = 1$, le corollaire précédent implique ainsi que *toutes les extensions infinies $\mathcal{K}$ contenues dans une S-p-tour de corps de classes d'un corps de nombres vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

5.3. Tours de corps de nombres. – Rappelons qu'une tour de corps de nombres est toujours asymptotiquement exacte.

Proposition 5.4. *Soit $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une tour de corps de nombres. Si $\mathscr{K}$ est telle que*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log[K_i : K_{i-1}]}{[K_{i-1} : \mathbb{Q}]} = 0,$$

alors $\mathscr{K}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Démonstration. Avec le théorème 4.2, il suffit de vérifier que $\mathscr{K}$ est de complexité galoisienne modérée. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse un entier $J \geq 1$ tel que

$$\frac{\log[K_j : K_{j-1}]}{[K_{j-1} : \mathbb{Q}]} \leq \varepsilon \, \frac{\log 3}{4}$$

pour tout $j \geq J$. Notons $M_J := \max_{1 \leq j \leq J} \log \xi_{K_j/K_{j-1}}$. Fixons un entier $J' \geq J$ tel que $M_J \leq \varepsilon \, g(K_i)$ pour tout $i \geq J'$. Pour tous entiers $J < j \leq i$, la borne triviale $\xi_{K_j/K_{j-1}} \leq [K_j : K_{j-1}]!$, l'inégalité $g(K_i) \geq g(K_j)$ et la borne de Minkowski (1.1) donnent alors la majoration :

$$\frac{\log \xi_{K_j/K_{j-1}}}{g(K_i)} \leq \frac{\log\left([K_j : K_{j-1}]!\right)}{g(K_i)} \leq \frac{[K_j : \mathbb{Q}]}{g(K_j)} \, \frac{\log[K_j : K_{j-1}]}{[K_{j-1} : \mathbb{Q}]} \leq \frac{4}{\log 3} \, \frac{\log[K_j : K_{j-1}]}{[K_{j-1} : \mathbb{Q}]} \leq \varepsilon.$$

Par suite, nous avons

$$\frac{\log \xi_{K_i/\mathbb{Q}}}{g(K_i)} \leq \max_{1 \leq j \leq i} \left\{ \frac{\log \xi_{K_j/K_{j-1}}}{g(K_i)} \right\} = \max \left\{ \frac{M_J}{g(K_i)}, \max_{J < j \leq i} \left\{ \frac{\log \xi_{K_j/K_{j-1}}}{g(K_i)} \right\} \right\} \leq \varepsilon$$

pour tout entier $i \geq J'$. La tour $\mathscr{K}$ est donc de complexité galoisienne modérée. $\square$

5.4. Extensions infinies. – Nous dirons, suivant en cela [TV02], qu'une extension algébrique $\mathcal{L}$ de $\mathbb{Q}$ *vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé* s'il existe une tour de corps de nombres dont la réunion est $\mathcal{L}$ qui vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé (c'est alors le cas pour toute tour de corps de nombres dont la réunion est $\mathcal{L}$ d'après les résultats de [TV02, §7]).

Proposition 5.5. *Soit $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une famille de corps de nombres de complexité galoisienne modérée. Toute extension algébrique $\mathcal{L}$ de $\mathbb{Q}$ contenant $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ satisfait le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Fixons une première tour $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de corps de nombres dont la réunion est $\mathcal{L}$ et construisons par récurrence une seconde tour $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réunion $\mathcal{L}$ et dont la complexité galoisienne est modérée. Nous posons $M_0 = \mathbb{Q}$ et, à $i \geq 1$ donné, nous définissions M_i à partir de M_{i-1} comme suit. Pour tout $j \geq 1$, posons $M_{i,j} := M_{i-1} \cdot L_i \cdot K_j$. Les inclusions $\mathbb{Q} \subset K_j \subset M_{i,j}$ impliquent

$$\xi_{M_{i,j}/\mathbb{Q}} \leq \max\{\xi_{K_j/\mathbb{Q}}, \xi_{M_{i,j}/K_j}\} \leq \max\{\xi_{K_j/\mathbb{Q}}, [M_{i,j} : K_j]!\} \leq \max\{\xi_{K_j/\mathbb{Q}}, [M_{i-1} \cdot L_i : \mathbb{Q}]!\}.$$

Ainsi, le quotient $(\log \xi_{M_{i,j}/\mathbb{Q}})/g(K_j)$ tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$. Soient j_i l'entier minimal tel que $(\log \xi_{M_{i,j_i}/\mathbb{Q}})/g(K_{j_i}) \leq 2^{-i}$ et $M_i := M_{i,j_i}$. Puisque $g(K_{j_i}) \leq g(M_i)$, le quotient $(\log \xi_{M_i/\mathbb{Q}})/g(M_i)$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini. Par suite la tour $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dont la réunion est $\mathcal{L}$, est de complexité galoisienne modérée. Ceci conduit à la conclusion souhaitée. $\square$

Le résultat ci-dessus permet d'obtenir de nombreux corollaires. Par exemple, une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ contenant une extension galoisienne par pas $\mathcal{K}/\mathbb{Q}$ de degré infini vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Énonçons également le cas particulier suivant :

Corollaire 5.6. *Soit $\mathcal{K}$ une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. On suppose que $\mathcal{K}$ contient une infinité de corps quadratiques. Alors $\mathcal{K}$ satisfait le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Appliquer la proposition 5.5 à la famille des corps quadratiques. $\square$

Ce corollaire est étonnant en ce que les preuves d'autres cas particuliers de la conjecture de Tsfasman–Vlăduţ se basent usuellement sur la finitude du nombre de corps quadratiques contenus dans les corps de nombres de la famille considérée (voir par exemple le lemme 7.3 et le théorème 7.3 de [TV02]).

5.5. Exemples explicites. – Voici quelques illustrations d'application du corollaire 5.3, tirées des articles [Mai00], [HM01], [HM02] et [HMR21].

Exemple 5.7. Dans [Mai00, §3], Maire construit explicitement des corps de nombres $M/\mathbb{Q}$ dont la 2-tour de Hilbert $\mathcal{M}_2$ est de degré infini sur M. Les corps globaux infinis $\mathcal{M}_2$ de [Mai00, §3] vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé, par le corollaire 5.3.

Maire utilise ces corps infinis pour produire des exemples de corps de nombres K dont la tour de Hilbert $\mathcal{H}_K/K$ est finie mais dont l'extension galoisienne maximale non ramifiée $\mathcal{K}_\infty/K$ est infinie (voir son théorème 3.1). Comme l'extension $\mathcal{K}_\infty/K$ est galoisienne, nos résultats impliquent que $\mathcal{K}_\infty$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. On ne peut malheureusement pas prouver la même conclusion pour les familles formées de sous-extensions arbitraires de $\mathcal{K}_\infty/K$.

Exemple 5.8. Dans ce même article, Maire construit (voir [Mai00, théorème 5.1]) également une suite infinie $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps quadratiques sur $\mathbb{Q}$ tels que, pour tout i, la tour de Hilbert $\mathcal{H}_{F_i}$ est une extension finie de F_i bien que F_i admette une extension non ramifiée infinie $\mathcal{K}_i$ de degré surnaturel 2^∞. Chacun de ces corps globaux infinis $\mathcal{K}_i$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Exemple 5.9. Dans leurs exemples A1, B1 et C1 de [HM01, §3.2] ainsi que ceux de [HM02, §3], Hajir et Maire construisent explicitement des spécimens de corps de nombres K et d'ensembles finis T de places de K tels que l'extension $K_T(2)/K$ est infinie. Dans chacun de ces exemples, notre corollaire 5.3 montre que l'extension $K_T(2)$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Exemple 5.10. Les exemples de [HM02, §3] ont plus tard été repris par Zykin dans [Zyk05, théorème 4]. Il obtient des tours asymptotiquement bonnes $\mathcal{L}$ pour lesquelles $\beta(\mathcal{L})$ est, conditionnellement à GRH, exceptionnellement petit. Spécifiquement, Zykin montre que

$$0,56497 \leq \beta(\mathcal{L}) \leq 0,59749.$$

Dans cet encadrement, la minoration de $\beta(\mathcal{L})$ reste valable inconditionnellement, seule la majoration nécessite GRH. Avec la même méthode de programmation linéaire, on pourrait toutefois obtenir une majoration moins précise, mais inconditionnelle, de $\beta(\mathcal{L})$ en utilisant la version inconditionnelle (plus faible) de l'inégalité fondamentale de Tsfasman–Vlăduţ.

Zykin considère un corps totalement complexe K de degré 12 qui n'est ni galoisien par pas ni à clôture galoisienne résoluble sur $\mathbb{Q}$ ($\mathfrak{S}_6$ est un quotient de son groupe de Galois) mais admet une $\{\mathfrak{p}\}$-2-tour de corps de classes $\mathcal{L} = K_{\{\mathfrak{p}\}}(2)$ infinie modérément ramifée, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de norme 9 (voir [HM02]).

Avant le présent travail, supposer GRH était la seule façon d'assurer que $\mathcal{L}$ vérifie la conjecture de Tsfasman–Vlăduţ. Avec notre corollaire 5.3, on sait à présent que la tour $\mathcal{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Plus précisément, si l'on écrit $\mathcal{L} = \bigcup_i L_i$, la limite

$$\mathcal{BS}(\mathcal{L}) := \lim_{i\to\infty} \frac{\log\left(h(L_i)\ R(L_i)\right)}{g(L_i)}$$

existe et l'on a *inconditionnellement* $\mathcal{BS}(\mathcal{L}) = \beta(\mathcal{L}) \geq 0,56497$.

Exemple 5.11. Il suit aussi du corollaire 5.3 que les exemples obtenus par « coupe dans $\mathrm{Gal}(K_S(p)/K)$ » dans le tout récent travail [HMR21] vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Cela suggère de belles perspectives : après avoir donné des versions effectives de leurs résultats, on pourra, avec l'approche de [Zyk05], exhiber des tours de corps de nombres $\mathcal{L}$ dont les ratios de Brauer–Siegel $\mathcal{BS}(\mathcal{L})$ sont remarquablement petits.

Remerciements – Les auteurs remercient Stéphane Louboutin et Christian Maire pour leurs remarques sur une version précédente de ce travail, celles-ci ont permis d'améliorer nos résultats et leur présentation. Le premier auteur a été en partie financé par la Swiss National Science Foundation (au travers de la bourse SNSF #170565 attribuée à Pierre Le Boudec), le second par le projet *GA CROCOCO* de la région Bourgogne Franche-Comté. Les deux premiers auteurs ont été partiellement financés par le projet ANR-17-CE40-0012 *FLAIR*.

Références

[Bra47] R. Brauer : On the zeta-functions of algebraic number fields. *Amer. J. Math.*, 69:243–250, 1947. ↑ 1, 9, 10

[Bra50] R. Brauer : On the zeta-functions of algebraic number fields. II. *Amer. J. Math.*, 72:739–746, 1950. ↑ 1

[Dix21] A. B. Dixit : On the generalized Brauer-Siegel theorem for asymptotically exact families with solvable galois closure. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2021(14):10941–10956, 2021. ↑ 2, 12

[Gri16] R. Griffon : *Analogues du théorème de Brauer-Siegel pour quelques familles de courbes elliptiques.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7), 2016. ↑ 1

[Gri18a] R. Griffon : Analogue of the Brauer–Siegel theorem for Legendre elliptic curves. *Journal of Number Theory*, 193:189–212, December 2018. ↑ 1

[Gri18b] R. Griffon : A Brauer-Siegel theorem for Fermat surfaces over finite fields. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 97(3):523–549, 2018. ↑ 1

[Gri19] R. Griffon : Bounds on special values of L-functions of elliptic curves in an Artin-Schreier family. *Eur. J. Math.*, 5(2):476–517, 2019. ↑ 1

[Hin19] M. Hindry : Analogues of Brauer-Siegel theorem in arithmetic geometry. *In Arithmetic geometry : computation and applications*, volume 722 de *Contemp. Math.*, pages 19–41. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019. ↑ 1

[HM00] S. Hamdy et B. Möller : Security of cryptosystems based on class groups of imaginary quadratic orders. *In Advances in cryptology—ASIACRYPT 2000 (Kyoto)*, volume 1976 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 234–247. Springer, Berlin, 2000. ↑ 1

[HM01] F. Hajir et C. Maire : Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields. *Compositio Math.*, 128(1):35–53, 2001. ↑ 13, 15

[HM02] F. Hajir et C. Maire : Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields. II. *J. Symbolic Comput.*, 33(4):415–423, 2002. ↑ 15

[HM18] F. Hajir et C. Maire : On the invariant factors of class groups in towers of number fields. *Canad. J. Math.*, 70(1):142–172, 2018. ↑ 1

[HMR21] F. Hajir, C. Maire et R. Ramakrishna : Cutting towers of number fields. *Annales Mathématiques du Québec*, 45, 321–345, 2021. ↑ 15

[HP16] M. Hindry et A. Pacheco : An analogue of the Brauer-Siegel theorem for abelian varieties in positive characteristic. *Mosc. Math. J.*, 16:45–93, 2016. ↑ 1

[Iva14] A. Ivanov : Reconstructing decomposition subgroups in arithmetic fundamental groups using regulators. *Prépublication* ArXiv:1409.4909, 2014. ↑ 1

[Lan94] S. Lang : *Algebraic number theory*, volume 110 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2nde édition, 1994. ↑ 1, 5

[Leb07] P. Lebacque : Generalised Mertens and Brauer-Siegel theorems. *Acta Arith.*, 130(4):333–350, 2007. ↑ 2, 3, 6

[Leb10] P. Lebacque : On Tsfasman-Vlăduţ invariants of infinite global fields. *Int. J. Number Theory*, 6(6):1419–1448, 2010. ↑ 4

[Leb15] P. Lebacque : Quelques résultats effectifs concernant les invariants de Tsfasman-Vlăduţ. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(1):63–99, 2015. ↑ 4

[Mai00] C. Maire : On infinite unramified extensions. *Pacific J. Math.*, 192(1):135–142, 2000. ↑ 15

[Mur99] V. K. Murty : Stark zeros in certain towers of fields. *Math. Res. Lett.*, 6(5):511–519, 1999. ↑ 8

[Mur01] V. K. Murty : Class numbers of CM-fields with solvable normal closure. *Compositio Math.*, 127(3): 273–287, 2001. ↑ 3, 11

[Neu99] J. Neukirch : *Algebraic number theory*, vol. 322 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 2nde édition, 1999. ↑ 4, 13

[OS93] A. M. Odlyzko et C. M. Skinner : Nonexistence of Siegel zeros in towers of radical extensions, *In A tribute to Emil Grosswald : number theory and related analysis*, volume 143 de *Contemp. Math.*, pp. 499–511. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. ↑ 8

[Osa87] H. Osada : The Galois groups of the polynomials $X^n + aX^l + b$, *J. Number Theory*, 25:230—238, 1987. ↑ 12

[Poi76] G. Poitou : Minorations de discriminants (d'après A. M. Odlyzko). *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1975/76 : Exposé 479, pp. 136–153, 1976. ↑ 4

[RT90] M. Y. Rosenbloom et M. A. Tsfasman : Multiplicative lattices in global fields. *Invent. Math.*, 101(3):687–696, 1990. ↑ 1

[Sel56] E. S. Selmer : On the irreducibility of certain trinomials. *Math. Scand.*, 4:287–302, 1956. ↑ 12

[Sie35] C. L. Siegel : Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper. *Acta Arith.*, 1:83–86, 1935. ↑ 1, 3, 11

[ST96] H. M. Stark et A. A. Terras : Zeta functions of finite graphs and coverings. *Adv. Math.*, 121(1):124–165, 1996. ↑ 1

[Sta74] H. M. Stark : Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem. *Invent. Math.*, 23:135–152, 1974. ↑ 3, 6, 9, 10, 11

[Tsi18] J. Tsimerman : The André-Oort conjecture for $\mathcal{A}_g$. *Ann. of Math. (2)*, 187(2):379–390, 2018. ↑ 1

[TV02] M. A. Tsfasman et S. G. Vlăduţ : Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem. *Mosc. Math. J.*, 2(2):329–402. 2002. ↑ 2, 4, 5, 7, 14

[Wal36] A. Walfisz : Zur additiven Zahlentheorie II. *Math. Zeitschrift*, 40:592–607, 1936. ↑ 11

[Won22] P.-J. Wong : On Stark's class number conjecture and the generalised Brauer–Siegel conjecture. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 106(2):288—300, 2022. ↑ 2, 11

[Zyk05] A. Zykin : The Brauer-Siegel and Tsfasman-Vlăduţ theorems for almost normal extensions of number fields. *Mosc. Math. J.*, 5(4):961–968, 2005. ↑ 2, 15

Richard Griffon (*richard.griffon@uca.fr*) – Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, Université Clermont Auvergne. Campus Universitaire des Cézeaux, 3 place Vasarely, TSA 60026 CS 60026, 63178 Aubière Cedex (France).

Philippe Lebacque (*philippe.lebacque@univ-fcomte.fr*) – Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université Bourgogne Franche-Comté. UFR Sciences et Techniques, 16 route de Gray, 25030 Besançon (France).

Gaël Rémond (*Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr*) – Institut Fourier, Université Grenoble Alpes. 100 rue des mathématiques, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9 (France).