Sur le théorème de Brauer–Siegel généralisé

Richard Griffon et Philippe Lebacque

À la mémoire de notre ami Alexey Zykin,
dont les idées nous inspirent toujours,
et de sa femme Tatyana

Résumé – Nous exhibons de nouvelles conditions qui assurent qu'une famille de corps de nombres vérifie inconditionnellement le théorème de Brauer–Siegel, tel que généralisé par Tsfasman et Vladuts. Nous donnons également quelques exemples explicites de telles familles. Nous prouvons en particulier que tout corps global infini contenu dans une p-tour de corps de classes vérifie le théorème de Brauer–Siegel.

Abstract – We exhibit new sets of conditions which ensure that a family of number fields unconditionally satisfies the Brauer–Siegel theorem, as generalised by Tsfasman and Vladuts. We also give a few explicit examples of such families. In particular, we prove that the Brauer–Siegel theorem holds for any infinite global field contained in a p-class field tower.

Mots-Clés : Théorie asymptotique des corps de nombres, Théorème de Brauer–Siegel.
2020 Math. Subj. Classification : 11R42, 11R47, 11R99.

Introduction

Le théorème de Brauer–Siegel décrit le comportement asymptotique du produit du nombre de classes d'un corps de nombres par son régulateur des unités en termes de son discriminant. C'est un résultat central de la théorie des nombres du XX^e^ siècle, qui a trouvé de nombreuses applications à des domaines variés des mathématiques (par exemple aux empilements de sphères [RT90], aux exposants de groupes de classes [HM18], en géométrie anabélienne [Iva14], pour la conjecture d'André–Oort pour $\mathcal{A}_g$ [Tsi18]) et de l'informatique (théorie des graphes [ST96], cryptosystèmes à clé publique [HM00]). Récemment, le théorème de Brauer–Siegel a également donné lieu à des énoncés en dimension supérieure : ainsi, on pourra consulter [HP16] et [Gri16, Gri18a, Gri19] pour un analogue dans certaines suites de courbes elliptiques. Mentionnons enfin que, faisant suite à la preuve dans [Gri18b] d'un théorème de Brauer–Siegel pour la suite des surfaces de Fermat sur un corps fini, Hindry [Hin19] a proposé une vaste généralisation conjecturale pour des suites de variétés sur les corps finis.

De façon précise, le théorème de Brauer–Siegel classique (voir [Bra47]) peut s'énoncer ainsi :

Théorème (Brauer–Siegel). *Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de corps de nombres. On suppose que la suite des degrés $[K_i:\mathbb{Q}]$ est bornée et que celle des discriminants absolus $\Delta(K_i)$ tend, en valeur absolue, vers $+\infty$ lorsque $i\to\infty$. Alors on a*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log\big(h(K_i)\,R(K_i)\big)}{\log\sqrt{|\Delta(K_i)|}}=1,$$

où $h(K_i)$ désigne le nombre de classes de K_i, et $R(K_i)$ son régulateur des unités.

L'étude du comportement asymptotique du produit $h(K_i) \cdot R(K_i)$ dans des suites de corps de nombres a été reprise par Tsfasman–Vladuts dans une situation plus générale (où l'on lève l'hypothèse de degré borné). Leurs travaux suggèrent la conjecture suivante (les définitions et notations seront rappelées à la section 1) :

Conjecture (Tsfasman–Vladuts). *Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Alors on a*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log\left(h(K_i)\,R(K_i)\right)}{\log\sqrt{|\Delta(K_i)|}} = 1 + \sum_q \phi_q \log\frac{q}{q-1} - \phi_{\mathbb{R}}\log 2 - \phi_{\mathbb{C}}\log(2\pi), \tag{1}$$

la somme du côté droit portant sur l'ensemble des puissances des nombres premiers.

Nous dirons qu'une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres *vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé* si la conjecture de Tsfasman–Vladuts est vraie pour cette famille. Tsfasman et Vladuts ont montré que l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) implique leur conjecture en toute généralité (voir [TV02]). Des cas particuliers de cette conjecture ont par la suite été démontrés (sans GRH) par Tsfasman–Vladuts, Zykin, Lebacque (avec des hypothèses successivement plus générales sur la famille $(K_i)_i$) et Dixit. Résumons comme suit quelques-uns des résultats inconditionnels majeurs en direction de cette conjecture :

Théorème. *Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de corps de nombres vérifiant l'une des hypothèses suivantes :*

$(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une...*	*Voir*
tour asymptotiquement bonne de corps de nombres galoisiens sur $\mathbb{Q}$	[TV02]
famille asymptotiquement mauvaise de corps de nombres galoisiens par pas sur $\mathbb{Q}$	[Zyk05]
famille asymptotiquement exacte de corps de nombres galoisiens par pas sur $\mathbb{Q}$	[Leb07]
tour asymptotiquement bonne de corps de nombres à clôture galoisienne résoluble	[Dix20]
famille asymptotiquement mauvaise de corps de nombres à clôture galoisienne résoluble	[Dix20]

Alors $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Dans la situation de la conjecture de Tsfasman–Vladuts, notons $g(K_i) := \log\sqrt{|\Delta(K_i)|}$ le genre de K_i, $\zeta_{K_i}(s)$ la fonction zeta de Dedekind de K_i, et $\zeta^*_{K_i}(1) = \mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta_{K_i}(s)$ son résidu en $s = 1$. Par la formule des classes de Dirichlet, la conclusion (1) de la conjecture se reformule ainsi :

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log\zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} = \sum_q \phi_q \log\frac{q}{q-1}.$$

La démonstration du théorème de Brauer–Siegel généralisé pour la famille $(K_i)_i$ passe alors par un encadrement du résidu $\zeta^*_{K_i}(1)$. L'étape cruciale est en fait l'obtention d'une minoration convenable de $\zeta^*_{K_i}(1)$: on ne s'étonnera donc pas que la conjecture de Tsfasman–Vladuts soit connue modulo l'hypothèse de Riemann généralisée. Sans cette hypothèse, Stark [Sta74] a montré comment un argument de « descente » des zéros de Siegel permet de conclure dans le cas galoisien par pas de degré borné : tout zéro de $\zeta_{K_i}(s)$ qui est « trop » proche de 1 est un zéro de Siegel associé à un sous-corps quadratique. Cette approche a ensuite été utilisée par Tsfasman–Vladuts pour prouver qu'une tour asymptotiquement bonne n'admet qu'un nombre fini de sous-corps quadratiques. Puis Zykin a remarqué que les travaux de Louboutin [Lou01, Theorem 1] liant résidu en $s = 1$ et zéro de Siegel permettent de conclure dans le cas asymptotiquement mauvais et galoisien par pas. Enfin Lebacque s'est appuyé sur le théorème de Mertens généralisé et les arguments de Zykin pour traiter le cas galoisien par pas général. Plus récemment encore, Dixit [Dix20] a démontré un résultat analogue à ceux de Tsfasman–Vladuts et Zykin pour les familles de corps dont la clôture galoisienne sur $\mathbb{Q}$ est résoluble : il s'appuie pour ce faire sur un résultat de « descente » de Murty [Mur01] en lieu et place de celui de Stark, et emprunte les arguments de Tsfasman, Vladuts et Zykin.

Dans cet article, nous reprenons et développons l'approche de Lebacque [Leb07] basée sur le théorème de Mertens (que l'on peut voir comme une « version finie » du théorème de Brauer–Siegel). Nous en tirons de nouveaux cas dans lequel la conjecture de Tsfasman–Vladuts est vraie.

Ce travail unifie et généralise tous les travaux précédents cités ci-avant. Nous illustrons l'importance de nos résultats par quelques exemples cruciaux pour la théorie asymptotique des corps globaux.

Énonçons à présent les trois principales situations dans lesquelles nous démontrons la conjecture de Tsfasfman–Vladuts.

Théorème A. *Soit une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{L} = (L_i)_i$ de corps de nombres et, pour tout i, un sous-corps K_i de L_i. On suppose :*

(1) Pour tout i, l'extension L_i/K_i est galoisienne par pas ou à clôture galoisienne résoluble.

(2) Et la suite $(K_i)_i$ vérifie l'une des hypothèses suivantes :
- *Le genre $g(K_i)$ reste borné lorsque i varie.*
- *La quantité $[K_i : \mathbb{Q}] \log[K_i : \mathbb{Q}]/g(K_i)$ tend vers 0.*
- *On a $[K_i : \mathbb{Q}]/g(K_i) \to 0$ et l'extension $K_i/\mathbb{Q}$ est galoisienne par pas pour tout i.*

Alors le théorème de Brauer–Siegel généralisé est vrai pour la famille $\mathscr{L}$.

Théorème B. *Soit une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{L} = (L_i)_i$ de corps de nombres. Soit, pour tout i, des sous-extensions $k_i \subset K_i$ de L_i. On suppose que le degré $[k_i : \mathbb{Q}]$ reste borné lorsque i varie, et que*

(1) Pour tout i, l'extension L_i/K_i est galoisienne par pas et l'on a $(2[K_i : k_i])! \leq 2[L_i : K_i]$.

(2) Ou pour tout i, l'extension L_i/K_i a clôture galoisienne résoluble et l'on a

$$(2[K_i : k_i])! \leq E([L_i : K_i])\,[L_i : K_i]/16,$$

où E est la suite définie à la section 2.4.

Alors le théorème de Brauer–Siegel généralisé est vrai pour la famille $\mathscr{L}$.

Théorème C. *Soit une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{L} = (L_i)_i$ de corps de nombres. Soit aussi une suite $\mathscr{K} = (K_i)_i$ une suite de corps de nombres. On suppose :*

(1) La suite $\mathscr{K}$ est de degré borné sur $\mathbb{Q}$, et la suite des composita $(K_i \cdot L_i/K_i)_i$ vérifie :
- *Lorsque i varie, le degré $[K_i \cdot L_i : L_i]$ reste borné,*
- *Ou pour tout i, $K_i \cdot L_i/K_i$ est galoisienne par pas,*
- *Ou pour tout i, $K_i \cdot L_i/K_i$ a une clôture galoisienne résoluble.*

(2) Ou la suite $\mathscr{K}$ est finie, et la suite des composita $(K_i \cdot L_i/K_i)_i$ est une suite d'extensions galoisiennes par pas ou à clôture galoisienne résoluble.

Alors le théorème de Brauer–Siegel généralisé est vrai pour la famille $\mathscr{L}$.

Ces résultats sont démontrés aux sections 3, 4 et 5, respectivement. Les deux sections précédentes fixent les notations, rappellent les définitions des quantités étudiées ici, ainsi que quelques résultats antérieurs de « descente de zéros exceptionnels ». Nous démontrons en outre à la section 2 deux lemmes clés sur lesquels sont basés nos résultats principaux.

En pratique, il est difficile de construire des tours asymptotiquement bonnes de corps de nombres. Les rares exemples connus sont essentiellement obtenus comme sous-extensions d'une extension infinie $K_S(p)$, où p est un nombre premier, S est un ensemble fini de places d'un corps de nombres K ne divisant pas p (voir §6.3). À l'exception du cas où K est galoisien par pas sur $\mathbb{Q}$, on ne savait pas jusqu'à présent démontrer le théorème de Brauer–Siegel généralisé pour ces corps $K_S(p)$, ni *a fortiori* pour leurs sous-corps. Ceci manquait à la théorie asymptotique des corps globaux de Tsfasman et Vladuts.

Dans la dernière partie de l'article (section 6), nous démontrons le résultat suivant, comme application des nouvelles méthodes que nous introduisons dans ce travail.

Proposition D. *Soient K un corps de nombres, p un nombre premier et S un ensemble fini de places de K. On note $K_S(p)$ la pro-p-extension maximale de K non ramifiée en dehors de S. Toute famille asymptotiquement exacte $\mathscr{L} = (L_i)_i$ de corps de nombres contenus dans $K_S(p)$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. En particulier, tout corps global infini contenu dans $K_S(p)$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Cette proposition est démontrée à la section 6. Renvoyons également à la fin de la section 5, pour quelques autres exemples explicites de familles de corps de nombres vérifiant le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

1. Définitions et notations

1.1. Corps de nombres. – Soit K un corps de nombres. On note $\Delta(K)$ son discriminant absolu. Le *genre de* K, noté $g(K)$, est alors défini par $g(K) = \log\sqrt{|\Delta(K)|}$. Cette définition est motivée par l'analogie entre l'arithmétique des corps de nombres et celle des corps de fonctions des courbes sur les corps finis. Il est classique (théorème d'Hermite–Minkowski, voir [Lan94, V. §4, Corollary]) que le seul corps de nombres de genre 0 est $\mathbb{Q}$. Si $K \neq \mathbb{Q}$, l'inégalité de Minkowski ([Lan94, V. §4, Theorem 5]) s' écrit :

$$[K : \mathbb{Q}] \leq \left(1 + (\log 3/2)^{-1}\right) g(K). \tag{1.1}$$

Si L/K est une extension finie de corps de nombres, rappelons que l'on a $g(L) \geq [L : K]\, g(K)$ (voir [Lan94, III. §3]). Il s'agit d'une version faible de la formule de Riemann–Hurwitz qui exprime, plus généralement, la différence $g(L) - [L : K]\, g(K)$ en termes de la ramification de l'extension L/K. En particulier, on déduit de cette formule l'égalité $g(L) = [L : K]\, g(K)$ lorsque l'extension L/K est partout non ramifiée.

Soit $h(K)$ le nombre de classes de K, et $R(K)$ son régulateur des unités. Notons $\zeta_K(s)$ la fonction zeta de Dedekind de K, et $\zeta_K^*(1)$ le résidu de celle-ci en $s = 1$. Rappelons que, dans ces notations, la formule des classes de Dirichlet (voir [Lan94, VIII. §2, Theorem 5]) s'écrit :

$$\zeta_K^*(1) = \frac{h(K)\, R(K)}{|\Delta(K)|} \cdot \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{|\mu_K|}, \tag{1.2}$$

où r_1 (resp. r_2) désigne le nombre de places réelles (resp. complexes) de K, et μ_K le groupe des racines de l'unité contenues dans K.

1.2. Extensions de corps de nombres. – Soit K un corps de nombres. Une extension L/K sera dite *galoisienne par pas* s'il existe une chaîne finie $K = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m = L$ de sous-extensions telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, l'extension L_i/L_{i-1} est galoisienne. (Les anglophones diraient *almost normal*, voir [Zyk05, Dix20]).

1.3. Invariants de Tsfasman–Vladuts. – Soient $\mathcal{Q}_0 \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des puissances des nombres premiers, et $\mathcal{Q}$ l'ensemble formé de $\mathcal{Q}_0$ ainsi que des deux symboles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Soit K un corps de nombres. Pour toute puissance q d'un nombre premier, on note $\Phi_q(K)$ le nombre de places de K de norme q. On note en outre $\Phi_\mathbb{R}(K)$ le nombre de places réelles, et $\Phi_\mathbb{C}(K)$ le nombre de places complexes de K. En particulier, on a $[K : \mathbb{Q}] = \Phi_\mathbb{R}(K) + 2\Phi_\mathbb{C}(K)$.

Considérons à présent une suite $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps de nombres. On dira que la suite $\mathscr{K}$ est *finie* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs à isomorphisme près. Dans le cas contraire, la suite $\mathscr{K}$ sera appelée une *famille*. Si $\mathscr{K}$ est une famille, on a nécessairement $g(K_i) \to \infty$ puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de corps de nombres de genre donné.

Pour tout $q \in \mathcal{Q}$, on définit, si cela a un sens, la limite suivante :

$$\phi_q(\mathscr{K}) = \lim_{i\to\infty} \frac{\Phi_q(K_i)}{g(K_i)}.$$

Une famille $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dite *asymptotiquement exacte* si toutes les limites $\phi_q(\mathscr{K})$, pour $q \in \mathcal{Q}$, existent. En pratique, ce n'est pas une condition restrictive. En effet, si $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une *tour*, c'est-à-dire si $K_i \subset K_{i+1}$ pour tout i, alors $\mathscr{K}$ est asymptotiquement exacte (voir [TV02, §2], où il est de plus démontré que les invariants $\phi_q(\mathscr{K})$ ne dépendent que de l'union $\bigcup_i K_i$). On montre plus généralement que, de toute famille $\mathscr{K}$, on peut extraire une sous-famille asymptotiquement exacte. Il est clair qu'une sous-famille infinie $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$ d'une famille asymptotiquement exacte l'est également, et que ses invariants $\phi_q(\mathscr{K}')$ sont alors égaux à ceux de $\mathscr{K}$. On renvoie à [Leb10] et [Leb15] pour une étude plus poussée des invariants $\phi_q(\mathscr{K})$.

Une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{K} = (K_i)$ est dite *asymptotiquement mauvaise* si $\phi_q(\mathscr{K}) = 0$ pour tout $q \in \mathscr{Q}$, et *asymptotiquement bonne* sinon. En pratique, les familles asymptotiquement mauvaises sont les plus communes. Rappelons le résultat suivant (voir Example 2.1 et Lemma 2.7 de [TV02], où l'on trouvera une preuve) :

Lemme 1.1. *Soit une famille $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps de nombres.*

(1) La famille $\mathscr{K}$ est asymptotiquement mauvaise si et seulement si le ratio $[K_i : \mathbb{Q}]/g(K_i)$ tend vers 0 lorsque $i \to \infty$.

(2) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, fixons une extension finie L_i de K_i ; notons $\mathscr{L} = (L_i)$ la famille ainsi formée. La famille $\mathscr{L}$ est asymptotiquement mauvaise dès que $\mathscr{K}$ l'est.

Remarque 1.2. Soit $\mathscr{K} = (K_i)_i$ une famille de corps de nombres galoisiens sur $\mathbb{Q}$. Pour tout i, on pose $S_i \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres premiers qui ramifient dans K_i. On suppose que $|S_i| \to \infty$ lorsque $i \to \infty$. Alors $\mathscr{K}$ est asymptotiquement mauvaise. La formule de Riemann–Hurwitz montre en effet que $\mathscr{K}$ vérifie le premier point du Lemme. Voir [Leb10, Proposition 2.1].

1.4. Théorème de Brauer–Siegel généralisé. – Soit $\mathscr{K} = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de corps de nombres. On pose, lorsque la limite existe,

$$\mathcal{BS}(\mathscr{K}) = \lim_{i\to\infty} \frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)}.$$

On dira que la famille $\mathscr{K}$ *vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé* si la limite $\mathcal{BS}(\mathscr{K})$ existe et si l'on a

$$\mathcal{BS}(\mathscr{K}) = \sum_{q\in\mathscr{Q}_0} \phi_q(\mathscr{K}) \log \frac{q}{q-1}. \tag{1.3}$$

Dans la terminologie de l'introduction de cet article, c'est dire que la conjecture de Tsfasman–Vladuts est vraie pour la famille $\mathscr{K}$.

Rappelons pour finir l'inégalité de Tsfasman–Vladuts (voir Theorem 7.1 de [TV02]) :

Théorème 1.3. *Si $\mathscr{K} = (K_i)_i$ est une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres, on a*

$$\limsup_i \frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} \leq \sum_{q\in\mathscr{Q}_0} \phi_q(\mathscr{K}) \log \frac{q}{q-1} < \infty. \tag{1.4}$$

2. Résultats préliminaires

Donnons nous donc une famille $(K_i)_i$ de corps de nombres, que l'on suppose asymptotiquement exacte. Rappelons rapidement l'architecture classique de la preuve de la conjecture de Tsfasman–Vladuts pour la famille $(K_i)_i$. Il s'agit d'abord de montrer que la limite

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log\left(h(K_i)\, R(K_i)\right)}{\log\sqrt{|\Delta(K_i)|}}$$

existe et, ensuite, qu'elle vaut $1+\sum_{z\in\mathscr{Q}_0} \phi_z(\mathscr{K}) \log(q/(q-1)) - \phi_\mathbb{R} \log 2 - \phi_\mathbb{C} \log 2\pi$. On se ramène, au travers de la formule des classes de Dirichlet (1.2), à prouver que la limite $\lim_{i\to\infty} \log \zeta^*_{K_i}(1)/g(K_i)$ existe, et que l'identité

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} = \sum_{q\in\mathscr{Q}_0} \phi_q(\mathscr{K}) \log \frac{q}{q-1}$$

est vérifiée. D'après l'inégalité de Tsfasfman–Vladuts (1.4), il suffit en fait de montrer que

$$\liminf_i \frac{\log \zeta^*_{K_i}(1)}{g(K_i)} \geq \sum_{q\in\mathscr{Q}_0} \phi_q(\mathscr{K}) \log \frac{q}{q-1}.$$

Cette rapide esquisse montre la nécessité d'étudier plus avant le résidu $\log \zeta^*_{K_i}(1)$ (en particulier de le minorer), et donc les zéros de la fonction $\zeta_{K_i}(s)$ proches de 1.

2.1. Zéros exceptionnels. – Soit K un corps de nombres différent de $\mathbb{Q}$. On dira que K admet un *zéro exceptionnel* si il existe un zero réel ρ de sa fonction zeta $\zeta_K(s)$ vérifiant

$$1 - (8g(K))^{-1} < \rho \leq 1.$$

Si un tel zéro existe, il est unique (voir [Sta74, Lemma 3]). Dans la suite de cet article, nous noterons $\rho(K)$ le zéro exceptionnel de $\zeta_K(s)$ s'il existe, et poserons $\rho(K) = 0$ sinon.

Louboutin [Lou01] a découvert la relation suivante entre résidu $\zeta^*_K(1)$ de la fonction zeta d'un corps de nombres $K \neq \mathbb{Q}$ et zéro réels (en particulier exceptionnels) de $\zeta_K(s)$.

Lemme 2.1. *Soit $K \neq \mathbb{Q}$ un corps de nombres. Si ρ est un zéro réel de $\zeta_K(s)$, on a*

$$\zeta^*_K(1) \leq (1-\rho)\left(\frac{\mathrm{e}\, g(K)}{[K:\mathbb{Q}]}\right)^{[K:\mathbb{Q}]}.$$

C'est un résultat essentiel pour le théorème de Brauer–Siegel généralisé, comme l'a remarqué Zykin dans [Zyk05], et comme on le verra dans la preuve du Théorème 3.3.

2.2. Théorème de Mertens et théorème de Brauer–Siegel. – L'article [Leb07] démontre la forme effective (et inconditionnelle) suivante du théorème de Mertens.

Théorème 2.2. *Il existe une constante effective $C > 0$ telle que, pour tout corps de nombres K et tout $X > 1$ vérifiant $\log X > C[K:\mathbb{Q}]g(K)^2$, l'on a*

$$\sum_{\substack{q \in \mathcal{Q}_0 \\ q \leq X}} \Phi_q(K) \log \frac{q}{q-1} = \log\log X + \gamma + \log \zeta^*_K(1) + O\left(\frac{1}{(1-\rho(K))\log X}\right), \tag{2.1}$$

où γ est la constante d'Euler–Mascheroni. La constante implicite dans le terme d'erreur est absolue et effective. Rappelons que $\rho(K)$ désigne le zéro exceptionnel de $\zeta_K(s)$ si celui-ci existe, et 0 sinon.

Pour le confort de lecture, rappelons comment déduire de ce théorème le lemme ci-dessous (qui est essentiellement le Lemma 6 de [Leb07]), dont nous ferons usage à plusieurs reprises.

Lemme 2.3. *Soit $\mathscr{L} = (L_i)_i$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Pour tout i, on note $\rho(L_i)$ le zéro exceptionnel de L_i (voir §2.1). Si l'on a de plus*

$$\liminf_i \frac{\log(1-\rho(L_i))}{g(L_i)} = 0, \qquad i.e., \quad \limsup_i \frac{|\log(1-\rho(L_i))|}{g(L_i)} = 0,$$

alors la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Ce lemme peut être vu comme une version généralisée du Lemma 4 de [Sta74] : ce dernier exprime, de façon similaire, une condition suffisante sur les zéros exceptionnels pour qu'une famille de corps de nombres vérifie le théorème de Brauer–Siegel *classique*.

Démonstration. Avec l'inégalité de Tsfasman–Vladuts (1.4), il suffit de montrer que la somme $\Sigma_0(\mathscr{L}) := \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathscr{L}) \log q/(q-1)$ vérifie

$$\Sigma_0(\mathscr{L}) \leq \liminf_i \frac{\log \zeta^*_{L_i}(1)}{g(L_i)}.$$

Pour alléger les notations dans cette preuve, nous noterons $n_i = [L_i : \mathbb{Q}]$, $g_i = g(L_i)$ et $\rho_i = \rho(L_i)$ pour tout $L_i \in \mathscr{L}$. Pour tout i, on pose $X_i := \exp\left(2C\, n_i g_i^2/(1-\rho_i)\right)$ et, pour tout $q \in \mathcal{Q}_0$,

$$f_i(q) := \frac{\Phi_q(L_i)}{g_i} \log \frac{q}{q-1} \text{ si } q \leq X_i, \qquad \text{et } f_i(q) := 0 \text{ sinon.}$$

Comme $\rho_i \in [0,1[$, X_i vérifie $\log X_i > Cn_i g_i^2$. Pour $L_i \in \mathscr{L}$, on déduit de (2.1) que

$$\frac{\log \zeta^*_{L_i}(1)}{g_i} \geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) - \frac{\log\log X_i}{g_i} - \frac{\gamma}{g_i} - \frac{c_0}{g_i(1-\rho_i)\log X_i}.$$

pour une certaine constante absolue $c_0 > 0$. Par choix de X_i, on en tire la minoration

$$\begin{aligned}\frac{\log \zeta^*_{L_i}(1)}{g_i} &\geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) + \frac{\log(1-\rho_i)}{g_i} - \frac{\gamma + \log(2C)}{g_i} - \frac{c_0(2C)^{-1}}{n_i g_i^3} - \frac{\log n_i}{g_i} - \frac{2\log g_i}{g_i} \\ &\geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) + \frac{\log(1-\rho_i)}{g_i} - \frac{\gamma + \log(2C) + c_0(2C)^{-1} + \log(n_i/g_i)}{g_i} - \frac{3\log g_i}{g_i} \\ &\geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) - \frac{|\log(1-\rho_i)|}{g_i} - o(1), \qquad \text{lorsque } g_i \to \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Rappelons en effet que n_i/g_i est borné (par inégalité de Minkowski (1.1)) et que $(\log g_i)/g_i = o(1)$.

La famille $\mathscr{L}$ étant asymptotiquement exacte, il est clair que

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \liminf_i f_i(q) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \lim_{i \to \infty} f_i(q) = \Sigma_0(\mathscr{L}) < \infty.$$

Par ailleurs, on déduit du lemme de Fatou que

$$\Sigma_0(\mathscr{L}) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \liminf_i f_i(q) \leq \liminf_i \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q).$$

Prenant les limites inférieures de part et d'autre de (2.2), et reportant l'inégalité ci-dessus dans la relation obtenue, on obtient que

$$\liminf_i \frac{\log \zeta^*_{L_i}(1)}{g(L_i)} \geq \Sigma_0(\mathscr{L}) - \limsup_i \frac{|\log(1-\rho_i)|}{g_i} + 0.$$

Avec l'hypothèse, on conclut donc que $\liminf_i \dfrac{\log \zeta^*_{L_i}(1)}{g(L_i)} \geq \Sigma_0(\mathscr{L})$, ce qu'il fallait démontrer. □

On déduit immédiatement du Lemme 2.3 ci-dessus le cas particulier important (et bien connu, voir Theorem 7.2 et Remark 7.2 de [TV02]) suivant :

Corollaire 2.4. *Soit $\mathscr{L} = (L_i)_i$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Si, pour i assez grand, aucun des corps $L_i \in \mathscr{L}$ n'admet de zéro exceptionnel, la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

2.3. Deux lemmes clé. − Les résultats principaux de cet article s'appuient sur les deux lemmes ci-après.

Lemme 2.5. *Soit $\mathscr{M} = (M_i)$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. On suppose que, pour tout i, la fonction zeta $\zeta_{M_i}(s)$ admet un zéro réel ρ_i, et qu'il existe un corps de nombres F_i tel que $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$. On note $\mathscr{F} = (F_i)$ la suite de ces corps, et l'on fait les trois hypothèses suivantes sur $\mathscr{F}$:*

(i) Le ratio $g(F_i)/g(M_i)$ reste borné lorsque i varie,

(ii) Si la suite $\mathscr{F}$ n'est pas finie, le quotient $[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i)$ tend vers 0 lorsque $i \to \infty$,

(iii) Si la suite $\mathscr{F}$ n'est pas finie, le ratio $(\log \zeta^*_{F_i}(1))/g(F_i)$ tend vers 0 lorsque $i \to \infty$.

Alors $\mathscr{M}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Dans les applications, l'un des intérêts du lemme 2.5 est de n'imposer ni contrainte sur la position des zéros ρ_i dans l'intervalle $[0,1]$, ni que F_i soit contenu dans M_i.

Démonstration. L'argument qui suit est adapté d'un raisonnement dû à Zykin. Notons que $F_i \neq \mathbb{Q}$ pour tout i, puisque $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. D'après le Lemme 2.1, on a

$$\zeta^*_{F_i}(1) \leq (1-\rho_i)\,\alpha(F_i)^{[F_i:\mathbb{Q}]}, \quad \text{où l'on a posé } \alpha(F_i) := \mathrm{e}\,g(F_i)/[F_i:\mathbb{Q}].$$

Il s'ensuit que

$$0 \leq \frac{|\log(1-\rho_i)|}{g(M_i)} \leq \underbrace{\frac{|\log \zeta^*_{F_i}(1)|}{g(M_i)}}_{:=A_i} + \underbrace{\frac{[F_i:\mathbb{Q}]\,|\log \alpha(F_i)|}{g(M_i)}}_{:=B_i}. \tag{2.3}$$

Deux cas de figure se présentent. *Ou bien la suite $\mathscr{F}$ est finie* (*i.e.*, ne prend qu'un nombre fini de valeurs), auquel cas toutes les quantités au numérateur dans le membre de droite de (2.3) sont bornées. Dans cette situation, la quantité $A_i + B_i$ tend vers 0, puisque le genre $g(M_i)$ n'est pas borné lorsque M_i parcourt $\mathscr{M}$.

Ou bien la suite $\mathscr{F}$ est infinie : auquel cas, le genre $g(F_i)$ n'est pas borné. Ceci étant, il existe par hypothèse *(i)* un réel $B > 0$ tel que $g(F_i) \leq Bg(M_i)$. La quantité A_i dans (2.3) vérifie donc

$$0 \leq A_i = \frac{|\log \zeta^*_{F_i}(1)|}{g(M_i)} = \frac{|\log \zeta^*_{F_i}(1)|}{g(F_i)} \cdot \frac{g(F_i)}{g(M_i)} \leq B \cdot \frac{|\log \zeta^*_{F_i}(1)|}{g(F_i)}.$$

On sait en outre par *(iii)* que $\lim_{i\to\infty} \log \zeta^*_{F_i}(1)/g(F_i)$ existe et vaut 0. Ainsi, on a $\lim_{i\to\infty} A_i = 0$. Remarquons à présent que la quantité B_i dans (2.3) satisfait

$$B_i = \frac{[F_i:\mathbb{Q}]\,|\log \alpha(F_i)|}{g(M_i)} = \frac{|\log \alpha(F_i)|}{\alpha(F_i)} \cdot \mathrm{e} \cdot \frac{g(F_i)}{g(M_i)} \leq \mathrm{e}B \cdot \frac{|\log \alpha(F_i)|}{\alpha(F_i)}.$$

On déduit de la dernière hypothèse inutilisée *(ii)* que $\lim_{i\to\infty} \alpha(F_i) = \infty$, ce qui implique par l'inégalité ci-dessus que $\lim_{i\to\infty} B_i = 0$. Dans chacun des deux cas, nous avons donc démontré que

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \frac{|\log(1-\rho_i)|}{g(M_i)} \leq \lim_{i\to\infty} (A_i + B_i) = 0.$$

On applique alors le Lemme 2.3 à la famille $\mathscr{M}$ pour conclure. □

Remarque 2.6. Dans la situation du lemme 2.5, si à la place de *(i)–(iii)*, l'on impose plutôt que

(i') Le ratio $g(F_i)/g(M_i)$ tende vers 0 lorsque $i \to \infty$,

(ii') Et, lorsque la suite $\mathscr{F}$ n'est pas finie, que le ratio $(\log \zeta^*_{F_i}(1))/g(F_i)$ reste borné,

on peut, avec la même preuve, conclure que la famille $\mathscr{M}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Nous utiliserons par ailleurs à plusieurs reprises l'argument de « partition » suivant :

Lemme 2.7. *Soit $\mathscr{L} = (L_i)_i$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Étant donnée une suite $(c_i)_i$ de réels de $]0,1[$ telle que $\liminf_i (\log c_i)/g(L_i) = 0$, on considère la sous-suite $\mathscr{L}_0$ de $\mathscr{L}$ formée des $L_i \in \mathscr{L}$ dont la fonction zeta s'annule sur l'intervalle $[1-c_i, 1[$. Si la suite $\mathscr{L}_0$ est infinie, on suppose qu'elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Alors la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Posons $\mathscr{L}_* := \mathscr{L} \smallsetminus \mathscr{L}_0$ la sous-famille de $\mathscr{L}$ formé des $L_i \in \mathscr{L}$ dont la fonction zeta ne s'annule pas sur l'intervalle $[1-c_i, 1[$. Puisque $\mathscr{L}$ est asymptotiquement exacte, celles des sous-familles $\mathscr{L}_0$ et $\mathscr{L}_*$ qui sont infinies le sont aussi. Pour que $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \sqcup \mathscr{L}_*$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, il suffit que celles des sous-familles $\mathscr{L}_0$ et $\mathscr{L}_*$ qui sont infinies vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé. D'après l'hypothèse, il reste donc à démontrer que $\mathscr{L}_*$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si elle est infinie.

Supposons donc $\mathscr{L}_*$ infinie et, pour tout $L_j \in \mathscr{L}_*$, notons $\rho(L_j)$ le zéro exceptionnel de $\zeta_{L_j}(s)$ (voir §2.1). Par construction de $\mathscr{L}_*$, on a pour tout j les inégalités :

$$0 \geq \frac{\log(1-\rho(L_j))}{g(L_j)} \geq \frac{\log c_j}{g(L_j)}.$$

Puisque $\liminf_j (\log c_j)/g(L_j) = 0$, on a $\liminf_{L_j \in \mathscr{L}_*} \log(1-\rho(L_j))/g(L_j) = 0$. L'hypothèse du Lemme 2.3 est ainsi satisfaite par la famille $\mathscr{L}_*$. D'où la conclusion. □

2.4. Descente des zéros exceptionnels. – Afin d'appliquer le Lemme 2.5, nous aurons besoin d'arguments de « descente des zéros exceptionnels » à des sous-extensions pour lesquelles le théorème de Brauer–Siegel est vrai. Dans ce paragraphe, nous rappelons ainsi, sous une forme parfois légèrement modifiée, les résultats importants de descente des zéros exceptionnels.

Le théorème suivant est essentiellement dû à Stark (voir [Sta74, Lemma 10]). Dans sa forme originale, il est énoncé pour $K = \mathbb{Q}$ mais il reste valable (avec la même preuve) dans le cas d'un corps de nombres quelconque.

Théorème 2.8. *Soit L/K une extension finie de corps de nombres qui est galoisienne par pas. On suppose que la fonction zeta $\zeta_L(s)$ admet un zéro réel ρ vérifiant*

$$1 - (32g(L))^{-1} \leq \rho < 1.$$

Alors il existe une sous-extension F de L/K avec $[F : K] \leq 2$ et $\zeta_F(\rho) = 0$.

Démonstration. Il s'agit d'un corollaire des Lemma 3 et Theorem 3 de [Sta74] ; il se démontre comme le Lemma 10 *loc. cit.* en remplaçant $\mathbb{Q}$ par K. (On perd alors le fait que F est nécessairement une extension quadratique de K puisqu'il est possible, si $K \neq \mathbb{Q}$, que $\zeta_K(\rho) = 0$). □

Rappelons aussi une forme plus générale du Lemma 8 de [Sta74]. Là encore, l'énoncé de [Sta74] suppose $K = \mathbb{Q}$ mais le résultat reste valable dans la situation « relative » décrite ici :

Lemme 2.9. *Soit L/K une extension de corps de nombres. On suppose que la fonction $\zeta_L(s)$ admet un zéro réel ρ vérifiant*

$$1 - \left(8g(L)\,[L : K]!\right)^{-1} \leq \rho < 1.$$

Alors il existe une sous-extension F de L/K telle que $[F : K] \leq 2$ avec $\zeta_F(\rho) = 0$.

Remarque 2.10. La conjecture d'Artin permet d'obtenir une version très forte du Lemme 2.9. Supposant en effet que les fonctions L d'Artin sont analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, on montre (voir [Sta74, Theorem 4]) l'énoncé suivant : Si L/K est une extension de corps de nombres telle que $\zeta_L(s)$ admette un zéro réel ρ dans l'intervalle $[1 - \left(8g(L)\left([L : K] - 1\right)\right)^{-1}, 1[$, alors il existe une sous-extension au plus quadratique F de L/K telle que $\zeta_F(\rho) = 0$.

Le facteur $[L : K]!$ du Lemme 2.9 étant remplaçé par $[L : K] - 1$, on pourrait alors « descendre » des zéros dans un intervalle bien plus grand.

Un autre résultat de descente a été prouvé plus récemment par Murty (voir [Mur01]). Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $e(n) = \max_{p^v \| n} v$, le maximum portant sur les nombres premiers divisant n, et l'on pose $E(n) := 3^{1/3}12^{-1} \cdot (n/12)^{e(n)}(e(n) + 1)^2$. On a alors (*cf.* Theorem 2.1 de [Mur01]) :

Théorème 2.11. *Il existe une constante absolue $c_2 > 0$ que l'on peut supposer ≤ 1 telle que l'énoncé suivant soit vrai. Soit K un corps de nombres, et L/K une extension de degré n dont la clôture galoisienne est résoluble. Supposons que $\zeta_L(s)$ a un zéro ρ vérifiant*

$$1 - c_2\,(E(n)\,g(L))^{-1} \leq \rho < 1.$$

Alors il existe une sous-extension F de L/K telle que $[F : K] \leq 2$ avec $\zeta_F(\rho) = 0$.

Nous aurons besoin plus bas des deux estimations élémentaires suivantes sur la quantité $E(n)$:

Lemme 2.12. *(1) Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que $E(n) \geq c_3\, n$ pour tout $n \geq 2$.*
(2) Il existe une constante $c_4 > 0$ telle que $\log E(n) \leq c_4\,(\log n)^2$ pour tout $n \geq 2$.

Démonstration. Notons qu'il suffit de démontrer la minoration *(1)* pour $n \geq 13$ et d'ajuster la valeur de la constante pour englober le cas où $n \leq 12$. Pour $n \geq 12$, on a $E(n) \geq 2 \cdot 3^{1/3}12^{-2} \cdot n$ (on a en effet $e(n) \geq 1$ puisqu'un tel n a au moins un facteur premier), ce qu'il fallait démontrer.

Par définition, on a $E(n) \leq n^{e(n)}(e(n) + 1)^2$ pour tout $n \geq 1$. Il est par ailleurs clair que $e(n) \leq \log n / \log 2$. On en déduit que

$$\log E(n) \leq \frac{(\log n)^2}{\log 2} + 2\log\left(1 + \frac{\log n}{\log 2}\right) \leq \frac{(\log n)^2 + 2\log n}{\log 2} \leq \frac{3(\log n)^2}{\log 2},$$

ce qui prouve la seconde assertion. □

3. Théorème principal

3.1. Conditions. — Introduisons tout d'abord une série de notations pour certaines hypothèses récurrentes sur une suite de corps de nombres, ou une suite d'extensions de corps de nombres.

Étant donnée une suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps de nombres, on considère les conditions suivantes :

(H1) Le genre $g(K_i)$ reste borné lorsque i varie.

(H2) La quantité $[K_i:\mathbb{Q}]\log[K_i:\mathbb{Q}]/g(K_i)$ tend vers 0 lorsque $i\to\infty$.

(H3) La famille $(K_i)_i$ est asymptotiquement mauvaise et, pour tout i, l'extension $K_i/\mathbb{Q}$ est galoisienne par pas.

Notons que **(H1)** revient à supposer la suite $(K_i)_i$ finie (c'est-à-dire qu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs). Remarquons également que **(H2)** impose en particulier que le ratio $[K_i:\mathbb{Q}]/g(K_i)$ tende vers 0 : la suite $(K_i)_i$ est alors asymptotiquement mauvaise. Une famille $(K_i)_i$ satisfaisant l'une de **(H2)** ou **(H3)** vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé d'après [Leb07, Proposition 1(i)] ou [Zyk05, Theorem 1], respectivement.

Si maintenant $(L_i/K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'extensions de corps de nombres, on s'intéresse aux hypothèses suivantes :

(E1) pour tout i, l'extension L_i/K_i est galoisienne par pas,

(E2) pour tout i, l'extension L_i/K_i a une clôture galoisienne résoluble,

(E3) lorsque i varie, l'extension L_i/K_i est de degré borné.

On introduit de plus une condition commode « de descente des zéros exceptionnels » dans L_i/K_i :

(DES) Pour tout $i\in\mathbb{N}$, il existe $c(L_i)\in]0,1[$ tel que

(i) si $\zeta_{L_i}(s)$ admet un zéro ρ_i vérifiant $1-c(L_i)\le\rho_i<1$, il existe une sous-extension F_i de L_i/K_i avec $[F_i:K_i]\le 2$ telle que $\zeta_{F_i}(\rho_i)=0$,

(ii) et $\liminf_i(\log c(L_i))/g(L_i)=0$.

Notons que la condition **(DES)** est trivialement satisfaite si la fonction zeta de L_i n'a pas de zéro exceptionnel (prendre $c(L_i)=1/2$ par exemple). Démontrons incontinent que chacune des hypothèses **(E1)**, **(E2)**, **(E3)** implique la condition **(DES)**.

Proposition 3.1. *Soit $(L_i/K_i)_i$ une suite d'extensions de corps de nombres. Supposons que $g(L_i)\to\infty$ et que la suite $(L_i/K_i)_i$ satisfait l'une des conditions* **(E1)**, **(E2)** *ou* **(E3)**.

Alors la suite d'extensions $(L_i/K_i)_i$ satisfait **(DES)**.

Démonstration. Pour tout i, posons

$$c(L_i):=\begin{cases}(32g(L_i))^{-1} & \text{si (E1) est satisfaite,}\\ c_2\left(E([L_i:K_i])\,g(L_i)\right)^{-1} & \text{si (E2) est satisfaite,}\\ (8g(L_i)\,[L_i:K_i]!)^{-1} & \text{si (E3) est satisfaite.}\end{cases}$$

Dans chacun des cas, la première partie **(DES)**(i) de la condition **(DES)** est vérifiée : ceci suit en effet du Théorème 2.8 (resp. Théorème 2.11, Lemme 2.9) si l'hypothèse **(E1)** (resp. **(E2)**, **(E3)**) est satisfaite. Il reste donc à s'assurer que la suite $(c(L_i))_i$ ainsi définie vérifie **(DES)**(ii). C'est clair dans les cas **(E1)** et **(E3)** puisque $g(L_i)\to\infty$. Ne reste à traiter que le cas où la suite $(L_i/K_i)_i$ vérifie la condition **(E2)**. Il s'agit plus spécifiquement de démontrer que $\lim_{i\to\infty}(\log E([L_i:K_i]))/g(L_i)=0$. Or, d'après le Lemme 2.12*(2)*, il existe une constante $c_4>0$ telle que

$$\frac{\log E([L_i:K_i])}{g(L_i)}\le c_4\cdot\frac{(\log[L_i:\mathbb{Q}])^2}{g(L_i)}.$$

et l'inégalité de Minkowski (1.1) implique que $(\log[L_i:\mathbb{Q}])^2/g(L_i)$ tend vers 0. □

Remarque 3.2. Il convient ici de noter que la condition **(DES)** est automatiquement vérifiée si la conjecture d'Artin est vraie. En effet, étant donnée une suite $(L_i/K_i)_i$ d'extensions de corps de nombres avec $g(L_i) \to \infty$, la Remarque 2.10 indique que l'on peut choisir $c(L_i) = 8g(L_i)\,[L_i : K_i]$ dans **(DES)**(i). On observe alors que

$$\frac{\log c(L_i)}{g(L_i)} = o(1) + \frac{\log[L_i : K_i]}{g(L_i)}.$$

Distinguant les cas suivant que $[L_i : K_i]$ est borné ou non (et utilisant au besoin l'inégalité de Hermite–Minkowski (1.1)), on obtient que cette suite $c(L_i)$ vérifie **(DES)**(ii). Modulo la conjecture d'Artin pour les fonctions L concernées, la suite $(L_i/K_i)_i$ satisfait donc l'hypothèse **(DES)**.

3.2. Théorème clé. − Le théorème ci-dessous constitue l'un des résultats clé du présent article :

Théorème 3.3. *Soit $(L_i/K_i)_i$ une famille d'extensions de corps de nombres où $\mathscr{L} = (L_i)_i$ est asymptotiquement exacte (en particulier, $g(L_i) \to +\infty$). On suppose que la suite des extensions L_i/K_i vérifie l'hypothèse* **(DES)**, *et que la suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfait l'une de* **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**. *Alors la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, c'est-à-dire que l'on a*

$$\mathcal{BS}(\mathscr{L}) = \sum_{q\in\mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathscr{L}) \log \frac{q}{q-1}. \tag{3.1}$$

Remarque 3.4. Ce résultat étant de nature asymptotique, il suffit en fait que les hypothèses soient satisfaites pour i assez grand pour que la conclusion du théorème soit vraie.

Remarque 3.5. Comme on l'a vu à la Remarque 3.2, admettant la véracité de la conjecture d'Artin, la condition **(DES)** est automatiquement vérifiée par toute suite d'extensions L_i/K_i. Conditionnellement à cette conjecture, le Théorème se réécrit ainsi : Soit une famille asymptotiquement exacte $\mathscr{L} = (L_i)$ de corps de nombres telle que, pour tout i, L_i est une extension d'un corps de nombres K_i. Si la suite $\mathscr{K} = (K_i)$ satisfait l'une de **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**, la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Le choix $\mathscr{K} = (K_i = \mathbb{Q})_i$ (qui satisfait **(H1)**) dans cet énoncé redémontre que, *conditionnellement à la conjecture d'Artin, toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Soit $(c(L_i))_i$ une suite de $]0,1[$ avec les propriétés requises par l'hypothèse **(DES)**. Partitionnons la famille $\mathscr{L} = (L_i)_i$ en deux sous-familles $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ comme suit : Soit $\mathscr{L}_1$ la sous-famille de $\mathscr{L}$ formée des $L_i \in \mathscr{L}$ dont la fonction zeta ne s'annule pas sur l'intervalle $]1-c(L_i),1]$; et soit $\mathscr{L}_2$ la sous-famille de $\mathscr{L}$ contenant les corps L_i dont les fonctions zeta admettent un zéro dans l'intervalle $]1-c(L_i),1]$. D'après **(DES)**(ii), on a $\liminf_i (\log c(L_i))/g(L_i) = 0$. On déduit du Lemme 2.7 qu'il suffit pour conclure de démontrer que la sous-famille $\mathscr{L}_2$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé lorsqu'elle est infinie.

Supposons donc $\mathscr{L}_2$ infinie et, pour tout $L_i \in \mathscr{L}_2$, notons ρ_i le zéro de $\zeta_{L_i}(s)$ dans l'intervalle $]1-c(L_i),1]$. Par **(DES)**(i), il existe une sous-extension F_i/K_i de L_i/K_i telle que $[F_i : K_i] \leq 2$ vérifiant $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$.

On note $\mathscr{F} := (F_i)_i$ la suite de corps ainsi construite. Puisque F_i est un sous-corps de L_i, le ratio $g(F_i)/g(L_i)$ reste borné (par 1) lorsque i varie. Démontrons de plus que, lorsque la suite $\mathscr{F}$ n'est pas finie, elle vérifie l'une de **(H2)** ou **(H3)**. Supposons premièrement que $(K_i)_i$ vérifie **(H1)** ou **(H2)**. Puisque F_i/K_i est une extension au plus quadratique, on a

$$\frac{[F_i:\mathbb{Q}]\,\log[F_i:\mathbb{Q}]}{g(F_i)} \leq \frac{2[K_i:\mathbb{Q}]\,(\log 2 + \log[K_i:\mathbb{Q}])}{g(F_i)}.$$

Si (K_i) satisfait **(H1)**, le numérateur du ratio sur la droite est borné. Si (K_i) satisfait **(H2)**, on utilise l'inégalité $g(F_i) \geq g(K_i)$ pour déduire que

$$\frac{[F_i:\mathbb{Q}]\,\log[F_i:\mathbb{Q}]}{g(F_i)} \leq \frac{2[K_i:\mathbb{Q}]\,(\log 2 + \log[K_i:\mathbb{Q}])}{g(K_i)}.$$

La quantité de droite tendant vers 0, il en va de même pour $[F_i : \mathbb{Q}] \log[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i)$. Dans les deux cas, la famille $\mathscr{F}$ satisfait donc **(H2)**. A fortiori, le quotient $[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i)$ tend vers 0.

Traitons à présent le cas où (K_i) vérifie **(H3)**. Comme F_i/K_i est au plus quadratique, il est clair que l'extension $F_i/\mathbb{Q}$ est alors galoisienne par pas. Comme $[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i) \leq [K_i : \mathbb{Q}]/g(K_i)$ et que cette dernière quantité tend vers 0 par hypothèse, la famille $\mathscr{F}$ est asymptotiquement mauvaise. Donc $\mathscr{F}$ satisfait l'hypothèse **(H3)**. (En particulier, le ratio $[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i)$ tend vers 0.)

Lorsque la suite $\mathscr{F}$ est infinie, elle vérifie donc l'une de **(H2)** ou **(H3)**. Ainsi, elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel classique, au sens où la limite $\lim_{i\to\infty} \log \zeta^*_{F_i}(1)/g(F_i)$ existe et vaut 0. C'est en effet ce que l'on déduit de [Leb07, Proposition 1(i)] pour le cas **(H2)** et de [Zyk05, Theorem 1] pour le cas **(H3)**. On conclut alors en appliquant le Lemme 2.5 dont on vient de voir que les trois hypothèses sont satisfaites. □

Montrons au passage la Proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soit $\mathscr{L} = (L_i)$ une famille de corps de nombres. Pour tout i, fixons une sous-extension K_i de $L_i/\mathbb{Q}$. Supposons que la suite $\mathscr{K} = (K_i)$ ainsi formée vérifie l'une des hypothèses* **(H1)** *ou* **(H2)***, et que le degré $[L_i : K_i]$ reste borné lorsque i varie (condition* **(E3)***). Alors la famille $\mathscr{L}$ satisfait le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Avec la Proposition 1(i) de [Leb07], il suffit pour conclure de prouver que $\mathscr{L}$ satisfait l'hypothèse **(H2)**. Si la suite $\mathscr{K}$ vérifie **(H1)**, elle est finie : comme le degré $[K_i : \mathbb{Q}]$ reste borné lorsque i varie, il en est de même pour $[L_i : \mathbb{Q}]$. Il est alors clair que $\mathscr{L}$ satisfait **(H2)**. Si maintenant $\mathscr{K}$ vérifie **(H2)**, on déduit de l'inégalité $g(L_i) \geq [L_i : K_i]g(K_i)$ la majoration

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{[L_i : \mathbb{Q}] \log[L_i : \mathbb{Q}]}{g(L_i)} &\leq \frac{[K_i : \mathbb{Q}] \left(\log[L_i : K_i] + \log[K_i : \mathbb{Q}]\right)}{g(K_i)} \\ &\leq \log\left(\max_j [L_j : K_j]\right) \frac{[K_i : \mathbb{Q}]}{g(K_i)} + \frac{[K_i : \mathbb{Q}] \log[K_i : \mathbb{Q}]}{g(K_i)}. \end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque $i \to \infty$, la famille $\mathscr{L}$ satisfait bien **(H2)**. □

Combinant la Proposition 3.1 au Théorème 3.3, on obtient par ailleurs :

Corollaire 3.7. *Soit $\mathscr{L} = (L_i)_i$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Pour tout i, soit K_i une sous-extension de $L_i/\mathbb{Q}$. On suppose que la suite $(K_i)_i$ vérifie l'une des hypothèses* **(H1)**, **(H2)** *ou* **(H3)** *et, en outre, que la suite des extensions $(L_i/K_i)_i$ satisfait l'une des conditions* **(E1)**, **(E2)** *ou* **(E3)***. Alors la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel.*

Ce corollaire a été énoncé comme Théorème A dans l'introduction.

Remarque 3.8. Notons que ce corollaire s'applique au cas où la suite $(K_i)_i$ est constante, puisqu'alors $(K_i)_i$ satisfait l'hypothèse **(H1)**. De plus, remarquons à nouveau qu'il suffit de supposer que les conditions sur la suite (K_i) et sur la suite (L_i/K_i) sont satisfaites pour i assez grand.

4. Descente galoisienne par pas ou résoluble

Pour cette section, nous nous plaçons dans la situation suivante. Considérons trois suites de corps de nombres $\mathscr{K}_0 = (k_i)_i$, $\mathscr{K} = (K_i)_i$ et $\mathscr{L} = (L_i)_i$ telles que $k_i \subset K_i \subset L_i$ pour tout i. On suppose que la famille $\mathscr{L}$ est asymptotiquement exacte et que, lorsque i varie, le degré $[k_i : \mathbb{Q}]$ est borné. Sous certaines hypothèses sur la suite des extensions $(L_i/K_i)_i$ et sur la croissance des degrés $[K_i : k_i]$, nous démontrons que $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Précisément :

Théorème 4.1. *Dans la situation décrite ci-dessus, supposons en outre que la suite des extensions $(L_i/K_i)_i$ vérifie la condition* **(E1)** *et que,*

(C1) *Pour i assez grand, on a $(2[K_i : k_i])! \leq 2[L_i : K_i]$.*

Alors $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Théorème 4.2. *Dans la situation décrite ci-dessus, supposons en outre que la suite des extensions $(L_i/K_i)_i$ vérifie la condition* **(E2)** *et que,*

(C2) *Pour i assez grand, on a $(2[K_i : k_i])! \leq E([L_i : K_i]) \cdot [L_i : K_i]/(16c_2)$.*

Alors $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Démonstration des Théorèmes 4.1 et 4.2. Suivant que l'on se trouve sous la paire d'hypothèses **(E1)**&**(C1)** ou **(E2)**&**(C2)**, on pose

$$C_i := \begin{cases} (32g(L_i))^{-1} & \text{pour le Théorème 4.1,} \\ c_2\,(E([L_i : K_i])\,g(L_i))^{-1} & \text{pour le Théorème 4.2.} \end{cases}$$

On montre, comme dans la preuve de la Proposition 3.1, que $\liminf_i(\log C_i)/g(L_i) = 0$ dans les deux cas. On partitionne la famille $\mathscr{L} = (L_i)_i$ en deux sous-familles $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$: La sous-famille $\mathscr{L}_1$ est formée des corps $L_i \in \mathscr{L}$ dont la fonction zeta ne s'annule pas sur l'intervalle $[1 - C_i, 1[$; son complémentaire $\mathscr{L} \smallsetminus \mathscr{L}_1$ sera noté $\mathscr{L}_2$. D'après le Lemme 2.7, il suffit pour conclure de démontrer que la famille $\mathscr{L}_2$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si elle est infinie.

Pour tout i, la fonction zeta $\zeta_{L_i}(s)$ de $L_i \in \mathscr{L}_2$ s'annule en $\rho_i \in [1 - C_i, 1[$. *Sous les hypothèses du Théorème 4.1*, l'extension L_i/K_i est galoisienne par pas. On déduit du Théorème 2.8 qu'il existe une extension au plus quadratique F_i/K_i, contenue dans L_i et telle que $\zeta_{F_i}(\rho(L_i)) = 0$. Comme $K_i \subset F_i \subset L_i$ et que $[F_i : K_i] \leq 2$, on a $g(F_i)[L_i : K_i] \leq 2g(L_i)$. D'où, par la condition **(C1)**,

$$C_i^{-1} = 32g(L_i) \geq 8g(F_i) \cdot 2[L_i : K_i] \geq 8g(F_i)\,(2[K_i : k_i])! \geq 8g(F_i)\,[F_i : k_i]!.$$

Sous les hypothèses du Théorème 4.2, comme l'extension L_i/K_i a clôture galoisienne résoluble, on tire du Théorème 2.11 l'existence d'une sous-extension au plus quadratique F_i/K_i de L_i/K_i telle que $\zeta_{F_i}(\rho(L_i)) = 0$. Utilisant la condition **(C2)** et le même type d'inégalités que ci-dessus, on déduit que

$$C_i^{-1} = c_2^{-1}E([L_i : K_i])g(L_i) \geq (2c_2)^{-1}E([L_i : K_i])[L_i : K_i]g(F_i) \geq 8g(F_i)\,[F_i : k_i]!.$$

Ainsi, sous l'une ou l'autre des deux paires d'hypothèses **(E1)**&**(C1)** ou **(E2)**&**(C2)**, ρ_i est un zéro réel de $\zeta_{F_i}(s)$ vérifiant

$$1 - \rho_i \leq C_i \leq \left(8g(F_i)\,[F_i : k_i]!\right)^{-1}.$$

D'après le Lemme 2.9, il existe donc une extension au plus quadratique k_i'/k_i contenue dans F_i, et telle que $\zeta_{k_i'}(\rho_i) = 0$. Soit $\mathscr{K}_0' := (k_i')_i$ la suite des corps ainsi construits. Remarquons que les k_i' sont de degré borné sur $\mathbb{Q}$: le corps k_i' est en effet une extension au plus quadratique de k_i, dont le degré sur $\mathbb{Q}$ reste borné lorsque i varie, par hypothèse.

On applique alors le Lemme 2.5 pour conclure (avec $\mathscr{M} = \mathscr{L}$ et $\mathscr{F} = \mathscr{K}_0'$). Vérifions que les hypothèses de celui-ci sont bien satisfaites. Premièrement, on a $g(k_i')/g(L_i) \leq 1$ puisque $k_i' \subset L_i$. Deuxièmement, si la suite $\mathscr{K}_0'$ n'est pas finie, le ratio $[k_i' : \mathbb{Q}]/g(k_i')$ tend vers 0 puisque $[k_i' : \mathbb{Q}]$ est borné. Enfin, lorsque la suite $\mathscr{K}_0'$ est infinie, comme les k_i' sont de degré borné sur $\mathbb{Q}$, on fait directement appel au théorème classique de Brauer–Siegel (voir [Lan94, Chap. XVI, §4, Corollary]) pour voir que $\lim_i(\log \zeta^*_{k_i'}(1))/g(k_i') = 0$. On conclut du Lemme 2.5 que la famille $\mathscr{L}_2$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. □

Le Théorème 4.2 ci-dessus implique en particulier le

Corollaire 4.3. *Soit $\mathscr{K}_0 = (k_i)_i$, une suite de corps de nombres dont les degrés sur $\mathbb{Q}$ sont bornés. Pour tout i, soit L_i/k_i une extension finie dont la clôture galoisienne est résoluble. On suppose que la famille $\mathscr{L} = (L_i)_i$ est asymptotiquement exacte. Alors la famille $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Ce corollaire complète les résultats de [Dix20], qui traite le cas des familles asymptotiquement mauvaises de corps de nombres à clôture galoisienne résoluble sur $\mathbb{Q}$ (Theorem 3.2 *loc. cit.*), et celui des tours asymptotiquement bonnes de tels corps (Theorem 3.1 *loc. cit.*).

Démonstration. Il suffit de choisir, pour tout i, $K_i = k_i$ dans l'énoncé du Théorème 4.2. □

Exemple 4.4. Donnons un exemple de situation où le théorème 4.1 s'applique. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, posons $k_i = \mathbb{Q}$ et choisissons une extension $K_i/\mathbb{Q}$ non galoisienne de degré premier p_i. Soit également, pour tout i, un polynôme irréductible $f_i \in K_i[x]$ de degré $d_i \geq 2p_i$, et dont l'extension de décomposition L_i/K_i a pour groupe de Galois $\mathfrak{S}_{d_i}$. L'extension L_i/K_i est alors galoisienne de degré $d_i!$, avec $2\, d_i! \geq d_i! \geq (2p_i)!$.

D'après le Théorème 4.1, toute sous-famille asymptotiquement exacte de $\mathscr{L} = (L_i)_i$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

5. Compositum et descente

Les hypothèses qu'on utilise pour le théorème de Brauer–Siegel sont assez restrictives. En pratique, il arrive qu'il soit plus commode de vérifier ces conditions pour une famille de composita plutôt que pour la famille qu'on aimerait étudier. Dans cette section, nous donnons deux exemples de situations où l'on peut déduire la conclusion souhaitée à partir d'hypothèses sur une suite de composita.

Théorème 5.1. *Soit $\mathscr{M} = (M_i)$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres, et $\mathscr{K} = (K_i)_i$ une suite de corps de nombres galoisiens par pas dont les degrés sont bornés. Supposons que la suite $(K_i \cdot M_i/K_i)_i$ vérifie l'hypothèse* **(DES)** *et que la quantité $[M_i : \mathbb{Q}]\, g(K_i)/g(M_i)$ est bornée. Alors la famille $\mathscr{M}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Fixons un majorant $D \geq 1$ des degrés $[K_i : \mathbb{Q}]$ et une borne $B > 0$ sur la quantité $[M_i : \mathbb{Q}] \cdot g(K_i)/g(M_i)$. Utilisant un fait classique sur le discriminant d'un compositum (voir, par exemple, [Sta74, Lemma 7]), on remarque que

$$\begin{aligned} g(K_i \cdot M_i) &\leq [K_iM_i : M_i]\, g(M_i) + [K_iM_i : K_i]\, g(K_i) \leq [K_i : \mathbb{Q}]\, g(M_i) + [M_i : \mathbb{Q}]\, g(K_i) \\ &\leq D\, g(M_i) + B\, g(M_i) \leq (D + B)\, g(M_i) := B'\, g(M_i). \end{aligned}$$

En particulier, lorsque i varie, le quotient $g(K_i \cdot M_i)/g(M_i)$ reste borné.

Utilisant **(DES)**(i) pour la suite des extensions $(K_i \cdot M_i/K_i)_i$, on construit une suite $(C_i)_i$ de réels de $]0, 1[$ vérifiant $\liminf_i (\log C_i)/g(K_iM_i) = 0$. Partitionnons, comme précédemment, la famille $\mathscr{M}$ en deux sous-familles $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$: la première consistant en ceux des corps $M_i \in \mathscr{M}$ dont les fonctions zeta ne s'annulent pas sur $[1 - C_i, 1[$, la seconde en les autres. À nouveau, il suffit de démontrer que la famille $\mathscr{M}_2$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si elle est infinie.

Pour tout $M_i \in \mathscr{M}_2$, notons ρ_i le zéro de $\zeta_{M_i}(s)$ dans l'intervalle $[1 - C_i, 1[$. L'extension $K_i \cdot M_i/M_i$ est galoisienne par pas puisque $K_i/\mathbb{Q}$ l'est. Dès lors, comme $\zeta_{M_i}(s)$ s'annule en ρ_i, le Theorem 1 de [Bra47] implique que $\zeta_{K_iM_i}(s)$ s'annule également en ρ_i. Puisque l'on a $1 - \rho_i \leq C_i$, l'hypothèse **(DES)**(i) fournit une sous extension F_i de $K_i \cdot M_i/K_i$ telle que $[F_i : K_i] \leq 2$ et $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$. Notons $\mathscr{F} = (F_i)_i$ la suite de corps ainsi construite.

En vue d'appliquer le Lemme 2.5, vérifions que ses hypothèses sont satisfaites. Premièrement, puisque F_i est un sous-corps de $K_i \cdot M_i$, on a $g(F_i)/g(M_i) \leq g(K_i \cdot M_i)/g(M_i) \leq B'$. Si $\mathscr{F}$ est infinie, il est clair qu'elle est asymptotiquement mauvaise puisqu'elle est formée de corps de nombres de degré borné sur $\mathbb{Q}$. Enfin, lorsque la suite $\mathscr{F}$ est infinie, on sait pour la même raison qu'elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel classique (voir [Lan94, Chap. XVI, §4, Corollary]). C'est-à-dire que l'on a $\lim_i |\log \zeta^*_{F_i}(1)|/g(F_i) = 0$. On fait alors appel au Lemme 2.5 pour déduire que la famille $\mathscr{M}_2$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, puis au Lemme 2.7 pour conclure. □

D'après la Proposition 3.1, on peut donner des exemples de situations où les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites :

Corollaire 5.2. *Soit $\mathscr{M} = (M_i)_i$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres, et $\mathscr{K} = (K_i)_i$ une suite de corps de nombres galoisiens par pas dont les degrés sont bornés. Supposons que la suite $(K_i \cdot M_i/K_i)_i$ vérifie l'une des hypothèses* **(E1)**, **(E2)** *ou* **(E3)**, *et que la quantité $[M_i : \mathbb{Q}]\, g(K_i)/g(M_i)$ est bornée. Alors la famille $\mathscr{M}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Donnons à présent une variante, plus légère en hypothèses, du Théorème 5.1.

Théorème 5.3. *Soit $\mathscr{K} = (K_i)$ une suite finie de corps de nombres, et $\mathscr{M} = (M_i)_i$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. On suppose que, pour tout i, l'extension $K_i \cdot M_i/K_i$ est galoisienne par pas ou à clôture galoisienne résoluble. Alors la famille $\mathscr{M}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Démonstration. Pour tout i, notons K_i' la clôture galoisienne de K_i sur $\mathbb{Q}$. La suite (K_i) étant finie, nous pouvons fixer un majorant $D \geq 1$ des degrés $[K_i : \mathbb{Q}]$ et une borne $G \geq 1$ sur les genres $g(K_i')$. On remarque que K_i' est de degré au plus $D!$ sur $\mathbb{Q}$. Utilisant à nouveau la borne sur le discriminant d'un compositum (Lemma 7 de [Sta74]), on obtient la majoration suivante sur le genre de $K_i' \cdot M_i$:

$$\begin{aligned} g(K_i' \cdot M_i) &\leq [K_i'M_i : K_i']\, g(K_i') + [K_i'M_i : M_i]\, g(M_i) \leq [M_i : \mathbb{Q}]\, g(K_i') + [K_i' : \mathbb{Q}]\, g(M_i) \\ &\leq G\,[M_i : \mathbb{Q}] + D!\, g(M_i) \leq (Gc_0 + D!)\, g(M_i) =: B'\, g(M_i), \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $c_0 = 1 + (\log(3/2))^{-1}$, par l'inégalité de Minkowski (1.1). Il suit d'autre part du Lemme 2.12*(2)* qu'il y a une constante $c_4 > 0$ telle que

$$\log E([K_i'M_i : K_i']) \leq c_4\big(\log[K_i'M_i : K_i]\big)^2 \leq c_4\big(\log[M_i : \mathbb{Q}]\big)^2 \leq c_4\big(\log c_0 g(M_i)\big)^2.$$

Pour tout $i \geq 1$, posons $c_i' := \big(\max\{32, c_2^{-1}\, E([K_i'M_i : K_i'])\}\, g(K_i' \cdot M_i)\big)^{-1}$, où la constante c_2 est celle dont l'existence est démontrée au Théorème 2.11. Des inégalités ci-dessus, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{|\log c_i'|}{g(M_i)} &\leq \frac{\log 32}{g(M_i)} + \frac{\log E([K_i'M_i : K_i'])}{\log g(M_i)} + \frac{\log g(K_i'M_i)}{g(M_i)} \\ &\qquad\qquad \leq \frac{\log 32}{g(M_i)} + \frac{c_4\big(\log c_0 g(M_i)\big)^2}{g(M_i)} + \frac{\log\big(B'\, g(M_i)\big)}{g(M_i)} = O\left(\frac{\big(\log g(M_i)\big)^2}{g(M_i)}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la quantité $|\log c_i'|/g(M_i)$ tend vers 0 lorsque $i \to \infty$. Le Lemme 2.7 montre qu'il suffit de prouver que la sous-suite $\mathscr{M}_2$ de $\mathscr{M}$ formée des $M_i \in \mathscr{M}$ dont la fonction zeta s'annule sur l'intervalle $[1 - c_i', 1[$ vérifie, si elle est infinie, le théorème de Brauer–Siegel généralisé. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que $\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}$. Pour tout i, on note alors ρ_i le zéro réel de $\zeta_{M_i}(s)$ dans l'intervalle $[1 - c_i', 1[$. Pour un entier i, comme la fonction zeta de M_i s'annule en ρ_i et que l'extension $K_i' \cdot M_i/M_i$ est galoisienne, le Theorem 1 de [Bra47] implique que la fonction zeta de $K_i' \cdot M_i$ s'annule aussi en ρ_i. Distinguons à présent deux cas :

- *Si l'extension $K_i \cdot M_i/K_i$ est galoisienne par pas.* L'extension $K_i' \cdot M_i/M_i$ est galoisienne, si bien que sa sous-extension $K_i' \cdot M_i/K_i \cdot M_i$ l'est aussi. Puisque l'on a supposé $K_i \cdot M_i/K_i$ galoisienne par pas, l'extension $K_i' \cdot M_i/K_i'$ l'est donc également. Comme le zéro ρ_i de $\zeta_{K_iM_i}(s)$ vérifie $1 - \big(32g(K_i' \cdot M_i)\big)^{-1} \leq 1 - c_i' \leq \rho_i < 1$, le Théorème 2.8 de Stark montre qu'il existe une sous-extension F_i de $K_i' \cdot M_i/K_i'$ telle que $[F_i : K_i'] \leq 2$ et $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$.
- *Supposons maintenant que l'extension $K_i \cdot M_i/K_i$ a clôture galoisienne résoluble.* Notons L_i/K_i la clôture galoisienne de $K_i \cdot M_i/K_i$, et L_i'/K_i' celle de l'extension $K_i' \cdot M_i/K_i'$. Comme L_i/K_i est galoisienne, il en est de même de $L_i \cdot K_i'/K_i'$. En particulier, L_i' est contenue dans $K_i' \cdot L_i$. Le groupe $\mathrm{Gal}(L_i'/K_i')$ est donc un quotient de $\mathrm{Gal}(K_i' \cdot L_i/K_i')$, lui-même un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L_i/K_i)$. Ce dernier est résoluble par hypothèse. Par suite, $\mathrm{Gal}(L_i'/K_i')$ est également résoluble en tant que quotient d'un sous-groupe d'un groupe résoluble. Ainsi, l'extension $K_i' \cdot M_i/K_i'$ est à clôture galoisienne résoluble. Puisque le zéro ρ_i de $\zeta_{K_iM_i}(s)$ vérifie
$$1 - c_2\big(E([K_i' \cdot M_i : K_i'])\, g(K_i' \cdot M_i)\big)^{-1} \leq 1 - c_i' \leq \rho_i < 1,$$
le Théorème 2.11 affirme l'existence d'une sous-extension F_i de $K_i' \cdot M_i/K_i'$ de degré au plus 2 sur K_i' telle que $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$.

Nous avons donc construit, pour tout i, une extension au plus quadratique F_i de K_i', contenue dans $K_i' \cdot M_i$ et telle que $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$. Soit $\mathscr{F} = (F_i)_i$ cette suite de corps de nombres. Puisque la suite $\mathscr{K}$ est finie et que $\mathscr{F}$ est formée d'extensions au plus quadratiques de la clôture galoisienne d'élements de $\mathscr{K}$, la suite $\mathscr{F}$ est de degré borné sur $\mathbb{Q}$. En particulier, si $\mathscr{F}$ n'est pas finie, elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel classique (voir [Lan94, Chap. XVI, §4, Corollary]). Pour tout i, F_i est contenu dans $K_i'\cdot M_i$, de sorte que $g(F_i) \leq g(K_i'\cdot M_i)$. Les inégalités (5.1) montrent donc que le ratio $g(F_i)/g(M_i)$ reste borné lorsque i varie. Les hypothèses du Lemme 2.5 sont donc satisfaites. De ce lemme, on déduit que la famille $\mathscr{M}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. $\square$

Exemple 5.4. Soient Λ un ensemble fini d'entiers tous ≥ 2, et k un corps de nombres. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, fixons $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,i}) \in \Lambda^i$ et considérons les corps de nombres

$$K_i := k(\zeta_{a_{i,1}}, \ldots, \zeta_{a_{i,i}}) \quad \text{et} \quad M_i := k\left(2^{1/a_{i,1}}, 3^{1/a_{i,2}}, \ldots, p_i^{1/a_{i,i}}\right),$$

où p_i désigne le i-ième nombre premier et les $\zeta_{a_{i,j}}$ sont des racines primitives $a_{i,j}$-ièmes de l'unité. On note $\mathscr{M} = (M_i)_i$ et $\mathscr{K} = (K_i)_i$ les deux suites de de corps de nombres ainsi définies. Comme Λ est fini, la suite $\mathscr{K}$ est en fait finie, et donc de degré borné sur k. Pour tout i, l'extension K_i est galoisienne sur k (c'est un compositum de corps cyclotomiques). Par ailleurs, l'extension K_iM_i/K_i est galoisienne pour tout i : la suite de ces extensions vérifie donc l'hypothèse **(E1)**. De plus, comme la suite $\mathscr{K}$ est finie, l'inégalité (1.1) montre que le ratio $[M_i : k]g(K_i)/g(M_i)$ reste borné lorsque i varie.

Par le Corollaire 5.2 ci-dessus, toute sous-famille asymptotiquement exacte $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Dans le cas où $|\Lambda| = 1$, remarquons que $\mathscr{M}$ est une tour : elle est alors asymptotiquement exacte (voir §1.3). En général, on pourrait en fait montrer que la famille $\mathscr{M}$ elle-même est asymptotiquement mauvaise (pour des raisons de ramification).

Cet exemple étend un exemple de Dixit (voir [Dix20, Example 3.3]). Tout comme ce dernier, on saurait par d'autres moyens démontrer que $\mathscr{M}'$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Exemple 5.5. Donnons maintenant un exemple de famille de corps de nombres non galoisiens par pas et à clôture galoisienne non résoluble qui vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Notons $\mathfrak{S}_5$ le groupe symétrique sur 5 éléments. Pour tout nombre premier impair p, considérons le morphisme non-trivial de groupes $\varphi_p : \mathfrak{S}_5 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, et notons G_p le produit semi-direct $G_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_p} \mathfrak{S}_5$. Choisissons également un sous-groupe propre $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{S}_5$ que l'on suppose non contenu dans $\mathfrak{A}_5$, et notons $H_p := \{0\} \rtimes_{\varphi_p} \mathfrak{G}_p$ le sous-groupe correspondant de G_p.

Pour tout nombre premier p impair, on fixe un corps de nombres K_p galoisien sur $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $\mathfrak{S}_5$ (il en existe). Le Theorem 9.6.6 de [NSW08] affirme l'existence d'une extension L_p de K_p qui est galoisienne sur $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_p/\mathbb{Q}) \simeq G_p$. On note alors $M_p \subset L_p$ le sous-corps fixé par le sous-groupe $H_p \subset G_p$. On considère les suites $\mathscr{K} = (K_p)_{p\geq 3}$ et $\mathscr{M} = (M_p)_{p\geq 3}$ indexées par les nombres premiers impairs. On suppose enfin que $\mathscr{K}$ est une suite finie.

Pour tout nombre premier $p \geq 3$, on a $L_p = K_p\cdot M_p$. L'extension $K_p\cdot M_p/K_p$ est donc galoisienne par pas (en fait galoisienne, de groupe de Galois cyclique d'ordre p). Ainsi donc, la suite de ces extensions vérifie la condition **(E1)**. Puisque $\mathscr{K}$ est finie, la quantité $[M_p : \mathbb{Q}]\, g(K_p)/g(M_p)$ reste bornée quand p varie. Toute sous-famille asymptotiquement exacte $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ vérifie, d'après le Corollaire 5.2, le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Nous n'avons pas connaissance d'une autre façon de démontrer ce fait. On montre en effet que les extensions $M_p/\mathbb{Q}$ ne sont ni galoisiennes par pas, ni à clôture galoisienne résoluble :

— Pour un premier $p \geq 3$, si l'extension $M_p/\mathbb{Q}$ était galoisienne par pas, alors $L_p/\mathbb{Q}$ admettrait un sous-corps N_p galoisien sur $\mathbb{Q}$, contenu strictement dans M_p et différent de $\mathbb{Q}$. C'est-à-dire que G_p admettrait un sous-groupe distingué H_p' contenant H_p. Comme $\mathfrak{G}_p$ n'est par hypothèse pas contenu dans $\mathfrak{A}_5$, la projection de H_p' dans $\mathfrak{S}_5$ ne pourrait être que $\mathfrak{S}_5$ (car cette projection est distinguée dans $\mathfrak{S}_5$). Le sous-groupe H_p' contiendrait ainsi $\{0\} \times \mathfrak{S}_5$ et, puisque p est premier, H_p' serait exactement ce sous-groupe. Ainsi, le produit semi-direct G_p serait en fait direct. Ce qui contredirait notre hypothèse que le morphisme φ_p est non-trivial.

— Pour un premier $p \geq 3$, désignons la clôture galoisienne de M_p sur $\mathbb{Q}$ par M_p'. On sait que M_p' est contenue dans L_p : c'est donc un corps intermédiaire entre M_p et L_p, qui est galoisien sur $\mathbb{Q}$. Il y a nécessairement égalité $M_p' = L_p$, car H_p n'est pas distingué dans G_p (ce qui suit du fait que $\mathfrak{S}_p$ ne l'est pas dans $\mathfrak{S}_5$). Ainsi, on a $\mathrm{Gal}(M_p'/\mathbb{Q}) \simeq G_p$, ce qui prouve que la clôture galoisienne de M_p n'est pas résoluble.

6. Exemples

Dans cette section, nous montrons que des familles de corps de nombres que nous rencontrons dans la théorie asymptotique des corps globaux vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

6.1. Corps de Hilbert. – Commençons par étudier la situation suivante, dite horizontale :

Proposition 6.1. *Soit $\mathscr{K} = (K_i)_i$ une famille de corps de nombres satisfaisant l'une des hypothèses* **(H2)** *ou* **(H3)***. Pour tout i, on note $H_i := H(K_i)$ le corps de classes de Hilbert de K_i. La famille $\mathscr{H} := (H_i)_i$ ainsi définie vérifie le theorème de Brauer–Siegel généralisé. Lorsque $i \to \infty$, on a de plus*

$$\log\big(h(H_i)\, R(H_i)\big) \sim h(K_i)\, g(K_i) \sim h(K_i)\, \log\big(h(K_i)\, R(K_i)\big).$$

Démonstration. Que la famille $\mathscr{K}$ satisfasse **(H2)** ou **(H3)**, elle est asymptotiquement mauvaise (voir §3.1). La famille $\mathscr{H}$ l'est donc également, par le Lemme 1.1*(2)*. En particulier, $\mathscr{H}$ est asymptotiquement exacte et la suite des extensions H_i/K_i vérifie trivialement **(E1)**. On applique à $\mathscr{H}$ le Corollaire 3.7, montrant qu'elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Pour tout i, l'extension H_i/K_i est non ramifiée de degré $h(K_i)$, de sorte que $g(H_i) = h(K_i)g(K_i)$. Comme les familles $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ sont asymptotiquement mauvaises, on a $\log\big(h(H_i)\, R(H_i)\big) \sim g(H_i)$ et $\log\big(h(K_i)\, R(K_i)\big) \sim g(K_i)$ lorsque $i \to \infty$ (c'est le théorème de Brauer–Siegel classique). On tire de ces équivalents les relations asymptotiques souhaitées. □

6.2. Sous-extensions de pro-p-extensions. – On se restreint maintenant au cas des pro-p-extensions de corps de nombres, c'est-à-dire des extension galoisiennes de groupe de Galois un pro-p-groupe. On a le théorème suivant :

Théorème 6.2. *Soit $K_1, \dots, K_r$ des corps de nombres. On fixe, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, un nombre premier p_j et une pro-p_j-extension $\mathcal{K}_j$ de K_j. Soit $\mathcal{K}$ le compositum des $\mathcal{K}_j$. Toute famille asymptotiquement exacte $\mathscr{L} = (L_i)_i$ de corps de nombres contenus dans $\mathcal{K}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Le cas où $r = 1$ s'avère déjà être nouveau en toute généralité et très intéressant. Cela permet de montrer que les meilleurs (en terme de ratio de Brauer–Siegel) exemples connus de tours de corps de classes vérifient (inconditionnellement) le théorème de Brauer–Siegel.

Démonstration. Notons K le compositum de $K_1, \dots, K_r$ et, pour tout i, L_i' la clôture galoisienne de l'extension finie $L_i \cdot K/K$. L'extension L_i'/K est alors une sous-extension galoisienne finie de $\mathcal{K} \cdot K/K$. Par le Théorème 5.3, il suffit pour conclure de montrer que les extensions $L_i' \cdot K/K$ sont résolubles.

Démontrons, plus généralement que toute sous-extension galoisienne M/K finie de $\mathcal{K} \cdot K/K$ a un groupe de Galois résoluble. Un tel corps M est engendré sur K par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{K}$ puisque l'extension M/K est finie. Chacun de ces éléments est lui-même somme et produit d'éléments des $\mathcal{K}_j \cdot K$. Le corps de nombres M est donc contenu dans le compositum M' d'un nombre fini s d'extensions galoisiennes finies M_a/K, chacune contenue dans l'un des $\mathcal{K}_j \cdot K$. Pour tout $a \in \{1, \dots, s\}$, on note G_a le groupe de Galois de M_a/K. Puisque M_a est contenue dans l'un des composita $\mathcal{K}_j \cdot K$, le groupe G_a est un quotient fini du pro-p_j-groupe $\mathrm{Gal}(\mathcal{K}_j \cdot K/K)$, et est ainsi un p_j-groupe. Par suite, le groupe fini $\prod_{a=1}^{s} G_a$ est résoluble puisque c'est un produit de tels groupes. Or le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M'/K)$ est (isomorphe à) un sous-groupe de $\prod G_a$, il est donc résoluble. Il ne reste qu'à noter que $\mathrm{Gal}(M/K)$, comme quotient de $\mathrm{Gal}(M'/K)$, est résoluble.

Ce qu'il fallait démontrer. □

6.3. Extensions $K_S(p)$. – Les extensions infinies de corps de nombres asymptotiquement bonnes sont rares. Elles sont essentiellement construites comme sous-extensions d'extensions $K_S(p)$ infinies, dont le groupe de Galois passe le test de Golod–Shafarevich.

Soient K un corps de nombres, p un nombre premier et S un ensemble fini de places de K. On considère la pro-p-extension maximale $K_S(p)$ de K qui est non ramifiée hors de S. Lorsque l'extension $K_S(p)/K$ est infinie, on dit que le corps K *admet une S-p-tour de corps de classes infinie*. Par maximalité, l'extension $K_S(p)/K$ est galoisienne ; on note $G_S(p)$ son groupe de Galois.

Le Théorème 6.2 implique une version plus générale de la Proposition D, comme suit :

Corollaire 6.3. *Soit $K_1, \dots, K_r$ des corps de nombres. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, fixons un nombre premier p_i et un ensemble fini S_i de places de K_i. On note alors $\mathcal{K}$ le compositum*

$$\mathcal{K} := K_{1,S_1}(p_1) \cdot K_{2,S_2}(p_2) \cdot \ldots \cdot K_{r,S_r}(p_r),$$

que l'on suppose de degré infini sur $\mathbb{Q}$. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans $\mathcal{K}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Si de plus, pour tout i, les places de K_i contenues dans S_i ne divisent pas p_i, une telle famille est asymptotiquement bonne.

Démonstration. Soit $\mathscr{L} = (L_i)_i$ une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres tous contenus dans $\mathcal{K}$. Le Théorème 6.2 ci-avant montre que $\mathscr{L}$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Supposons à présent que, pour tout i, les places de S_i ne divisent pas p_i. On note K le compositum des K_i. Sous cette hypothèse, l'extension $\mathcal{K}/K$ est obtenue par compositum d'extensions modérément ramifiées, et est donc elle-même modérément ramifiée. On note S l'ensemble des places de K divisant l'une de celles des S_i. Pour tout i, la formule de Riemann–Hurwitz appliquée à l'extension $K \cdot L_i/K$ montre que l'on a

$$g(K \cdot L_i) \leq [K \cdot L_i : K] \left(g(K) + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p} \in S} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \right).$$

Il vient alors que

$$\frac{g(L_i)}{[L_i : \mathbb{Q}]} \leq \frac{g(K \cdot L_i)}{[K \cdot L_i : \mathbb{Q}]} \leq \frac{g(K)}{[K : \mathbb{Q}]} + \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in S} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{2[K : \mathbb{Q}]}.$$

Par suite, le ratio $g(L_i)/[L_i : \mathbb{Q}]$ reste borné lorsque i varie : son inverse $[L_i : \mathbb{Q}]/g(L_i)$ ne saurait donc tendre vers 0 lorsque $i \to \infty$. Comme la famille $\mathscr{L}$ est asymptotiquement exacte, on déduit du Lemme 1.1*(1)* qu'elle asymptotiquement bonne. □

Dans le cas particulier où $r = 1$, le Corollaire précédent implique que *toutes les extensions infinies construites par des S-p-tours de corps de classes à partir d'un corps de nombres K vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé.* Comme tout corps global infini est asymptotiquement exact, on en déduit le dernier point de la Proposition D : si K est un corps de nombres admettant une S-p-tour de corps de classes infinie, tout corps global infini contenu dans $K_S(p)$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Exemple 6.4. Voici quelques illustrations d'applications du Corollaire, tirées des articles [Mai00], [HM01], [HM02] et [HMR].

1. Les extensions M_2 de [Mai00, §3] vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Notons que ces extensions ne sont pas définies par des extensions galoisiennes par pas sur $\mathbb{Q}$.
2. Dans les exemples A1, B1 et C1 de [HM01, §3.2], l'extension K_T vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.
3. Les fameux exemples de [HM02, §3], repris par Zykin dans [Zyk05, Thm. 4], vérifient inconditionnellement le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Dans son article [Zyk05], Zykin a obtenu d'excellents ratios de Brauer–Siegel sous GRH, dont les bornes inférieures sont encore valables inconditionnellement, tandis que les bornes supérieures nécessitent l'inégalité fondamentale de Tsfasman–Vladuts sous GRH. On peut toutefois dériver de ces inégalités sans

GRH des bornes supérieures pour le ratio de Brauer–Siegel, en utilisant la même méthode de programmation linéaire. Ainsi, si l'on considère par exemple $k = \mathbb{Q}(\xi)$, où ξ est une racine du polynôme $P = X^6 + X^4 - 4X^3 - 7X^2 - X + 1$, et

$$K = k\left(\sqrt{-671\xi^5 - 467\xi^4 + 994\xi^3 - 3360\xi^2 - 2314\xi + 961}\right),$$

alors K est un corps totalement imaginaire de degré 12, non galoisien par pas et à clôture galoisienne non résoluble sur $\mathbb{Q}$ (son groupe de Galois admet $\mathfrak{S}_6$ comme quotient). De plus, le corps K admet une $\{\mathfrak{p}\}$-2-tour de corps de classes infinie $\mathcal{K}$ modérément ramifée, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de norme 9 (voir [HM02]). La tour $\mathcal{K} = K_{\{\mathfrak{p}\}}(2)$ vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, et l'on a inconditionnellement $BS(\mathcal{K}) \geq 0,564$.

4. Tous les exemples obtenus par « coupe dans $G_S(p)$ » dans [HMR] vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Remerciements – Le premier auteur a été en partie financé par la Swiss National Science Foundation, au travers de la bourse SNSF #170565 attribuée à Pierre Le Boudec. Il remercie l'Universität Basel et l'Université Clermont-Auvergne pour les excellentes conditions de travail. Les deux auteurs ont été partiellement financés par le projet ANR-17-CE40-0012 "Flair", le second auteur par le projet GA CROCOCO de la région Bourgogne Franche-Comté. Les deux auteurs remercient Stéphane Louboutin et Christian Maire.

Références

[Bra47] R. Brauer : On the zeta-functions of algebraic number fields. *Amer. J. Math.*, 69:243–250, 1947. ↑ 1, 14, 15

[Dix20] A. B. Dixit : On the generalized Brauer-Siegel theorem for asymptotically exact families with solvable galois closure. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (to appear), 2020. ↑ 2, 4, 13, 16

[Gri16] R. Griffon : *Analogues du théorème de Brauer-Siegel pour quelques familles de courbes elliptiques.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7), 2016. ↑ 1

[Gri18a] R. Griffon : Analogue of the Brauer–Siegel theorem for Legendre elliptic curves. *Journal of Number Theory*, 193:189–212, December 2018. ↑ 1

[Gri18b] R. Griffon : A Brauer-Siegel theorem for Fermat surfaces over finite fields. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 97(3):523–549, 2018. ↑ 1

[Gri19] R. Griffon : Bounds on special values of L-functions of elliptic curves in an Artin-Schreier family. *Eur. J. Math.*, 5(2):476–517, 2019. ↑ 1

[Hin19] M. Hindry : Analogues of Brauer-Siegel theorem in arithmetic geometry. *In Arithmetic geometry : computation and applications*, volume 722 de *Contemp. Math.*, pages 19–41. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019. ↑ 1

[HM00] S. Hamdy et B. Möller : Security of cryptosystems based on class groups of imaginary quadratic orders. *In Advances in cryptology—ASIACRYPT 2000 (Kyoto)*, volume 1976 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 234–247. Springer, Berlin, 2000. ↑ 1

[HM01] F. Hajir et C. Maire : Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields. *Compositio Math.*, 128(1):35–53, 2001. ↑ 18

[HM02] F. Hajir et C. Maire : Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields. II. *J. Symbolic Comput.*, 33(4):415–423, 2002. ↑ 18, 19

[HM18] F. Hajir et C. Maire : On the invariant factors of class groups in towers of number fields. *Canad. J. Math.*, 70(1):142–172, 2018. ↑ 1

[HMR] F. Hajir, C. Maire et R. Ramakrishna : Cutting towers of number fields. *à paraître à Annales Mathématiques du Québec.* ↑ 18, 19

[HP16] M. Hindry et A. Pacheco : An analogue of the Brauer-Siegel theorem for abelian varieties in positive characteristic. *Mosc. Math. J.*, 16:45–93, 2016. ↑ 1

[Iva14] A. Ivanov : Reconstructing decomposition subgroups in arithmetic fundamental groups using regulators. *Prépublication Arxiv https ://arxiv.org/abs/1409.4909v2*, 2014. ↑ 1

[Lan94] S. Lang : *Algebraic number theory*, volume 110 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2nde édition, 1994. ↑ 4, 13, 14, 16

[Leb07] P. Lebacque : Generalised Mertens and Brauer-Siegel theorems. *Acta Arith.*, 130(4):333–350, 2007. ↑ 2, 6, 10, 12

[Leb10] P. Lebacque : On Tsfasman-Vlăduţ invariants of infinite global fields. *Int. J. Number Theory*, 6(6):1419–1448, 2010. ↑ 5

[Leb15] P. Lebacque : Quelques résultats effectifs concernant les invariants de Tsfasman-Vlăduţ. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(1):63–99, 2015. ↑ 5

[Lou01] S. Louboutin : Explicit upper bounds for residues of Dedekind zeta functions and values of L-functions at $s = 1$, and explicit lower bounds for relative class numbers of CM-fields. *Canad. J. Math.*, 53(6):1194–1222, 2001. ↑ 2, 6

[Mai00] C. Maire : On infinite unramified extensions. *Pacific J. Math.*, 192(1):135–142, 2000. ↑ 18

[Mur01] V. K. Murty : Class numbers of CM-fields with solvable normal closure. *Compositio Math.*, 127(3):273–287, 2001. ↑ 2, 9

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg : *Cohomology of number fields*, vol. 323 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 2nde édition, 2008. ↑ 16

[RT90] M. Y. Rosenbloom et M. A. Tsfasman : Multiplicative lattices in global fields. *Invent. Math.*, 101(3):687–696, 1990. ↑ 1

[ST96] H. M. Stark et A. A. Terras : Zeta functions of finite graphs and coverings. *Adv. Math.*, 121(1):124–165, 1996. ↑ 1

[Sta74] H. M. Stark : Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem. *Invent. Math.*, 23:135–152, 1974. ↑ 2, 6, 9, 14, 15

[Tsi18] J. Tsimerman : The André-Oort conjecture for $\mathcal{A}_g$. *Ann. of Math. (2)*, 187(2):379–390, 2018. ↑ 1

[TV02] M. A. Tsfasman et S. G. Vlăduţ : Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem. volume 2, pages 329–402. 2002. ↑ 2, 4, 5, 7

[Zyk05] A. Zykin : The Brauer-Siegel and Tsfasman-Vlăduţ theorems for almost normal extensions of number fields. *Mosc. Math. J.*, 5(4):961–968, 974, 2005. ↑ 2, 4, 6, 10, 12, 18

Richard Griffon (*richard.griffon@uca.fr*) – Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, Université Clermont-Auvergne. Campus Universitaire des Cézeaux, 3 place Vasarely, TSA 60026 CS 60026, 63178 Aubière Cedex (France).

Philippe Lebacque (*philippe.lebacque@univ-fcomte.fr*) – Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université Bourgogne Franche-Comté. UFR Sciences et Techniques, 16 route de Gray, 25030 Besançon (France).